

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

北區 第一區(花蓮高中)

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時。
- (2)本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：考慮平面上一個凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\dots P_n (n \geq 3)$ 。這是一個島國，週邊是海洋。因此，其週邊長 p 就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離 d 的範圍之內都是她的領海。證明她的領海面積是

$$(p + \pi d)d.$$

有兩個問題要問你：

- (1)請你完成這問題的證明。(8 分)
- (2)如果有一個島嶼的形狀恰為圓形，且海岸線總長也是 p ，那麼這島嶼的領海面積比凸 n 邊形島國的領海面積大、相等或小呢？請你先猜答案，再實際計算是否猜對。(8 分)

【問題二】：設 $a < b$ 。函數 $f(x) = 4 + 2x - x^2$ 在區間 $[a, b]$ 上的最小值為 $2a$ ，最大值為 $2b$ ，求 a, b 之值。(16 分)

【問題三】：在一容器內裝有濃度 10% 的溶液 100 公克，注入濃度為 40% 的溶液 25 公克，均勻攪拌後，再倒出混合液 25 公克。如此反覆進行下去。設 a_n % 代表稀釋 n 次後，溶液的濃度，並令 a_0 % = 10% (溶液初始湛度)。

- (1)求 a_1 的值。(3 分)
- (2)列出 a_n 與 a_{n+1} 的相關式子。(5 分)
- (3)求 a_n 的一般公式。(9 分)