教育部九十一學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（二）【參考解答】

填充題:

一、令$\angle OAB=\theta$，且$\overline{AB}=x$。則$\cos\theta=1/x$，$\overline{OB}=\tan\theta$。由ΔOBC正弦定律，

$$\frac{\tan\theta}{\sin(60^\circ-\theta)}=\frac{1}{\sin 30^\circ}\text{，}$$

得知

$$\tan\theta=\frac{\sin(60^\circ-\theta)}{\sin 30^\circ}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\text{。}$$

$\therefore\quad \sin\theta=\sqrt{3}\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta$ 即 $\sin\theta(1+\cos\theta)=\sqrt{3}\cos^2\theta$。

兩邊平方得 $\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2=3\cos^4\theta$。

所以$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{3}{x^4}$即$x^4+2x^3-2x-4=(x-2)(x^3-2)=0$。

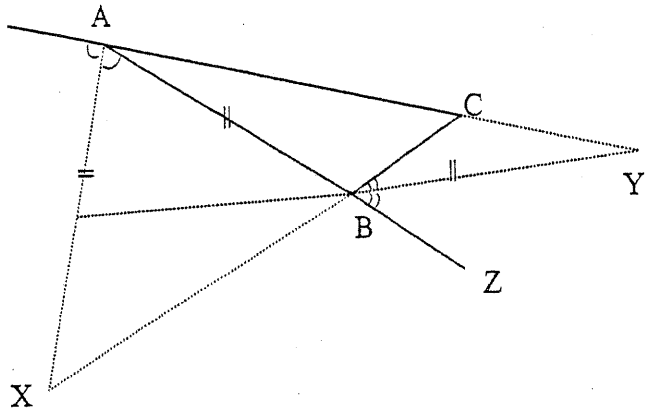
因此，$x=\sqrt[3]{2}$。

二、(a) 共$C_5^{10}=252$種派發方法。滿足條件派發方法的共7種，分別為

$1+2+3+4+5=15$, $1+2+3+4+6=16$, $1+2+3+4+7=17$, $1+2+3+4+8=18$,
$1+2+3+5+6=17$, $1+2+3+5+7=18$, $1+2+4+5+6=18$。
故機率為 7/252。

(b) 共$2^{10}=1024$種派發方法。B拿的牌組滿足條件的共25種，分別為
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$,
$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{1,6\}$, $\{1,7\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{2,6\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$,
$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$。
故機率為 25/1024。

三、因$\angle B<\angle C$，所以 B 介於 X 與 C 之間。同樣地，因$\angle C<\angle A$，所以 C 介於 A 與 Z 之間。若點 Z 在$\overline{AB}$上使得 B 介於 A 與 Z 之間，則由ΔABY知$\angle ZBY=2\angle A$。因此，$\angle BXA=\angle ABX=\angle ZBC=2\angle ZBY=4\angle A$。而$\Delta ABX$之三角和等於$90^\circ-\frac{1}{2}\angle A+8\angle A$，所以$\angle A=12^\circ$。



計算題:

一、(a) 設 $L=\sum_{1}^{10}(x_i-\theta)^2$。若$\frac{dL}{d\theta}=0$，則$\sum_{1}^{10}(x_i-\theta)=0$，$\theta=\frac{\sum x_i}{10}$。

另解: $L=10\theta^2-2\Sigma x_i\theta+\Sigma x_i^2=10[(\theta-\frac{\sum x_i}{10})^2+\frac{9}{100}\Sigma x_i^2]$。當$\theta=\frac{\sum x_i}{10}$時，L 達極小。

(b) 設 $md=\frac{x_5+x_6}{2}$ (x_i 之中位數)，考慮 $\Delta=\sum_{1}^{10}|x_i-\theta|-\sum_{1}^{10}|x_i-md|$。

若 $\theta>md$，可設 $x_m\le\theta<x_{m+1}$，其中 $m\ge 6$。則

$$\sum_{1}^{10}|x_i-\theta|=\sum_{1}^{m}|x_i-\theta|+\sum_{m+1}^{10}|x_i-\theta|=m\theta-(x_1+\cdots+x_m)+(x_{m+1}+\cdots+x_{10})-(10-m)\theta,$$

$$\sum_{1}^{10}|x_i-md|=5md-(x_1+\cdots+x_5)+(x_6+\cdots+x_{10})-5md。$$

相減得 $\Delta=(2m-10)\theta-2(x_6+\cdots+x_m)\ge 2[(m-5)\theta-(m-5)x_m]\ge 0$。

若 $\theta<md$，可設 $x_m\le\theta<x_{m+1}$，其中 $m\le 5$。則

$$\sum_{1}^{10}|x_i-\theta|=\sum_{1}^{m}|x_i-\theta|+\sum_{m+1}^{10}|x_i-\theta|=m\theta-(x_1+\cdots+x_m)+(x_{m+1}+\cdots+x_{10})-(10-m)\theta,$$

$$\sum_{1}^{10}|x_i-md|=5md-(x_1+\cdots+x_5)+(x_6+\cdots+x_{10})-5md。$$

相減得 $\Delta=(2m-10)\theta+2(x_{m+1}+\cdots+x_5)\ge 2[(m-5)\theta-(m-5)x_{m+1}]$

$=2(m-5)[\theta-x_{m+1}]\ge 0$。

所以當$\theta=md$時$\sum_{1}^{10}|x_i-\theta|$達到極小。

二、$x = 2y + 1 \pm \sqrt{30 + 24y - 2y^2}$，

若(x, y)為正整數解，則根號內的 $30+24y-2y^2 = 102 - 2(y-6)^2$ 必為一整數平方。故$(y-6)^2 \leq 51$。而只當$(y-6)^2 = 1$ 或 49 時 $102 - 2(y-6)^2$ 為一整數平方。因此 $y = 5, 7$ 或 13。故

$$(x, y) = (1, 5), (21, 5), (5, 7), (25, 7), (25, 13) \text{或} (29, 13)。$$