91 學年度 台南地區高中數學競賽

數學科能力競賽(一)

1. 已知數列$\{\alpha_n\}$的前n項之和$S_n=\frac{\pi}{12}(2n^2+n)$,且另一數列$\{x_n\}$其第$n$項

$x_n=\sin\alpha_n\cdot\sin\alpha_{n+1}\cdot\sin\alpha_{n+2}, n=1,2,3,\ldots$

(A) 試證:$\{\alpha_n\}$為一等差數列,

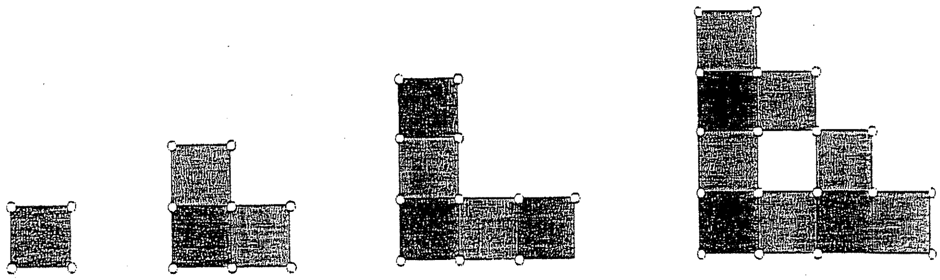
(B) 證明:$\{x_n\}$為一等比數列,

(C) 試求$\sum_{n=1}^{100}x_n$之值.

2. 已知複數 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $w=\cos\beta+i\sin\beta$, 且 $z+w=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$.

求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

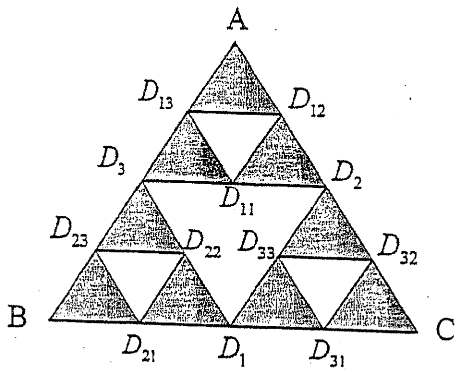
3. 有一種昆蟲，佔有同一個方格為家，永遠不搬家。同一代的昆蟲在同一時間於其所在處的上方、右方各生下一個昆蟲(可能是無性生殖)，生了之後就沒有生育能力，但也死不了。如果兩隻昆蟲同時佔有相同方格，那麼這兩隻昆蟲會彼此吞噬對方而亡。假設第一代僅有一隻昆蟲，令 G(n) 為第 n 代昆蟲的總數，T(n) 為第 1 代至第 n 代昆蟲的總數。已知 G(1)= 1，G(2)= 2，G(3)= 2；T(1)= 1，T(2)= 3，T(3)= 5，如下圖所示。 試問(1) G(2^n)=？ (2) T(2^n)=？ 其中 n = 0， 1，2，3…。(3) T(1027) =？



第一代　　二代　　三代　　四代

4. 將 2n+1 個男生與 n 個女生排成一排，其中 n = 1, 2, ...。試證我們一定可以在其中找到一位男生，使得他的任意一側，男生的個數恰是女生個數的兩倍。

5. (1) 給一正三角形 ΔABC，設 D_1, D_2, D_3 為 AB, BC, CA 上之中點，將 $\Delta D_1D_2D_3$ 之內部挖除，令 $\Delta_1 = \Delta ABC - (\Delta D_1D_2D_3$ 之內部$)$。同樣地，D_{11}, D_{12}, D_{13} 分別為 ΔAD_3D_2 之三邊之中點，D_{21}, D_{22}, D_{23} 分別為 ΔBD_1D_3 之三邊之中點，D_{31}, D_{32}, D_{33} 分別為 ΔD_1CD_2 之三邊之中點，令 $\Delta_2 = \Delta_1 - (\Delta D_{11}D_{12}D_{13}$ 之內部及 $\Delta D_{21}D_{22}D_{23}$ 之內部及 $\Delta D_{31}D_{32}D_{33}$ 之內部$)$，...，以此類推得 Δ_n，問 Δ_n 之面積為何？



(2) 任給一任意三角形 ΔABC，設面積為 a，重複類似(1)之步驟得 Δ_n，問 Δ_n 之面積及 $\lim_{n\to\infty}\Delta_n$ 為何？