臺灣省北部第四區高級中學九十一學年度

數學科能力競賽試題(一)(新竹高中)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分，第一、二題各 16 分，第三題 17 分。
2. 考試時間 2 小時。
3. 請將答案寫在答案卷上。
4. 計算紙必須連同答案卷繳回。

1. (a) 設 $\tan\frac{\theta}{2}=t$. 試用 t 分別表示 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$.

   (b) 試求函數 $f(t)=\dfrac{2t^4-12t^3+12t^2+12t+2}{t^4+2t^2+1}$ 的最大值與最小值.

2. 設 P 點落在三角形 ABC 外，且在 $\overline{BA}$，$\overline{BC}$ 所夾的角內，並設直線 PA, PB, PC 與直線 BC, CA, AB 分別交於 D, E, F 三點. 已知 ΔPBD，ΔPCE 與 ΔPAF 的面積相等，且 $\overline{AE}:\overline{EC}=1:\lambda$，其中 λ 為一常數. 證明：
   (a) $\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda-1=0$.
   (b) ΔPCE 與 ΔABC 的面積相等.

3. 給定正整數 n，我們考慮滿足 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geq 1$ 的任意 n 個相異整數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，並考慮所有 a_i+a_j，$i<j$；我們以 $f(n)$ 表示 a_i+a_j 為正整數的整數組 (a_i,a_j)，$i<j$ 之組數的最小值. 例如：$f(2)=f(3)=1$.
   (a) 試找出四個相異整數 a_1,a_2,a_3,a_4，使得 $a_1+a_2+a_3+a_4\geq 1$ 且 a_1+a_2，a_1+a_3，a_1+a_4，a_2+a_3，a_2+a_4，a_3+a_4 中恰有三組是正整數.
   (b) 試求 $f(4)$ 之值.
   (c) 試求 $f(2002)$ 之值.