台灣省第一區九十一學年度

高級中學數學及自然學科能力競賽

數學科筆試（一）試題【參考解答】

問題一：

解：設原先牧場的草總量為1單位，每隔一星期增加m單位。因此第t週之後，牧場的草總量函數$f(t)$為$f(t)=1+mt$，每頭牛每星期能吃的草總量為

$$\frac{f(6)}{27\times 6}=\frac{f(9)}{23\times 9}\Rightarrow m=\frac{5}{24}$$（單位）。因此，每頭牛每星期能吃的草總量為

$$\frac{f(6)}{27\times 6}=\frac{1}{72}$$（單位）。由$$\frac{1+\frac{5t}{24}}{21\times t}=\frac{f(t)}{21\times t}=\frac{1}{72}$$，得到$t=12$星期。

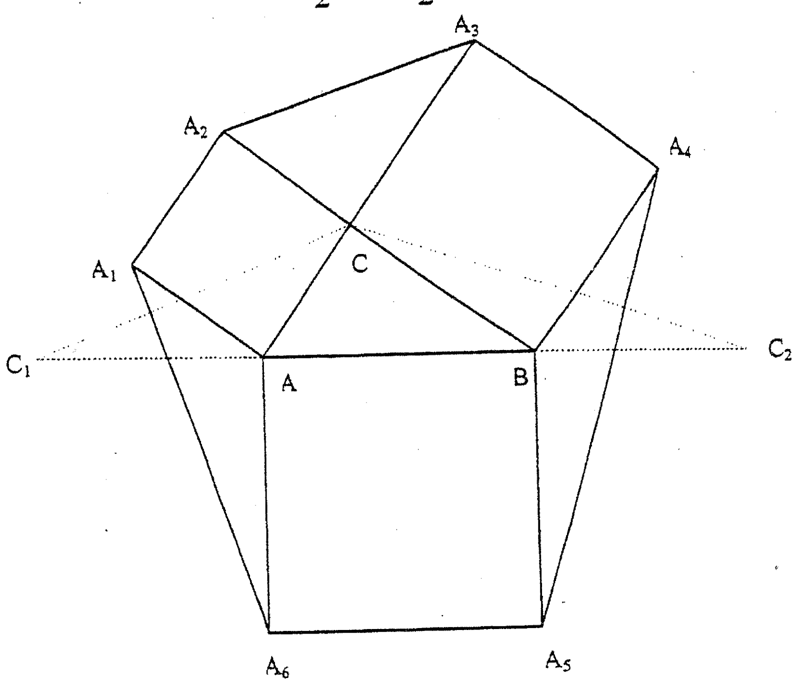
問題二：

解：如圖，巧添虛線補助線使得$C_1A=AA_6$, $C_2B=BA_5$。三角形C_1AC與三角形A_6AA_1全等（SAS），同理三角形C_2BC與三角形A_5BA_4全等。因為三角形ABC, C_1AC, C_2BC同底等高，所以它們的面積相同。因此六邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$的面積等於

$$\square AA_6A_5B+\square ACA_2A_1+\square BCA_3A_4+\Delta CA_2A_3+\Delta CC_1C_2.$$

計算得到（利用畢氏定理$c^2=a^2+b^2$）

$$(c^2+a^2+b^2)+(\frac{ab}{2}+3\times\frac{ab}{2})=2(a^2+ab+b^2)$$



問題三：

解：

$$9\tan^2\theta+4\cot^2\theta+12\tan\theta+12\cot\theta$$
$$=(9\tan^2\theta+6\cot\theta+6\cot\theta)+(4\cot^2\theta+6\tan\theta+6\tan\theta)$$
$$\geq 3\sqrt[3]{9\tan^2\theta\cdot 6\cot\theta\cdot 6\cot\theta}+3\sqrt[3]{4\cot^2\theta\cdot 6\tan\theta\cdot 6\tan\theta}$$
$$=13+3\cdot\sqrt[3]{324}+3\cdot\sqrt[3]{144}$$
$$=9\cdot\sqrt[3]{12}+6\cdot\sqrt[3]{18}$$

等號成立的充要條件為

$$9\tan^2\theta=6\cot\theta\ and\ 4\cot^2\theta=6\tan\theta$$

$$\Leftrightarrow \tan^3\theta=\frac{2}{3}$$

等號成立若且唯若 $a_1=a_2=\ldots=a_n=1, a_1+a_2+\ldots+a_n=2002$， 即 n=2002, $a_1=a_2=\ldots=a_{2002}=1$

問題四：

解：P 點關於平面 E: $x+2y+2z-3=0$ 之投影點為 $P'(3,-3,6)$，圓 C 之圓心 O 關於平面 E 之投影點為 $O'(1,2,2)$，由幾何上易知: 當 $\overline{PQ}$ 有最小值時，則此時最小點 P'' 亦為 $d(P',C)$ 有最小值時之最小點，注意到圓 C 之半徑為 $\sqrt{5}$，故所求之最小值為

$$\sqrt{\overline{P'P''}^2+\overline{PP'}^2}=\sqrt{(\overline{O'P'}-\overline{O'P''})^2+\overline{PP'}^2}=\sqrt{(3\sqrt{5}-\sqrt{5})^2+9^2}=\sqrt{101}$$ 。