教育部九十一學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（二）【參考解答】

（一）設此六次的點分別為 $x_i, i=1,2,\cdots,6$

依題意即是求 $\dfrac{|S|}{6^6}$，其中

$$S=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_6\left|\sum_{i=1}^{6}x_i=20, x_i\in N, 1\le x_i\le 6\right.\right\}。$$

利用排容原理（inclusion-exclusion principle）

設 $S'=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_6\left|\sum_{i=1}^{6}x_i=20, x_i\in N, x_i\ge 1\right.\right\}$，

對於 $j=1,2,\cdots,6$，

$$S_j=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_6\left|\sum_{i=1}^{6}x_i=20, x_i\in N, 1\le x_i, x_j>6\right.\right\}，$$

而對於 $6\ge j>k\ge 1$，

$$S_{jk}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_6\left|\sum_{i=1}^{6}x_i=20, x_i\in N, 1\le x_i, x_j>6\right.\right\}。$$

於是 $|S|=|S'|-\sum_{j=1}^{6}|S_j|+\sum_{6\ge j>k\ge 1}|S_{jk}|$。

今 $|S'|=C_5^{14+5}$, $\quad |S_j|=C_5^{8+5}$, $\quad |S_k|=C_5^{2+5}$，

所以 $|S|=C_5^{19}-6C_5^{13}+C_2^6C_5^7=4221$，

而所求為 $\dfrac{|S|}{6^6}=\dfrac{4221}{6^6}=\dfrac{469}{2^6\times 3^4}$。

（二）由 $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$

$$=\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{\sqrt[3]{b}}{3}+\frac{\sqrt[3]{b}}{3}+\frac{\sqrt[3]{b}}{3}$$

$$\geq 5\sqrt[5]{\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{b}}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{b}}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{b}}{3}}$$

$$=5\sqrt[5]{\frac{ab}{4\cdot 3^3}}$$

$$=5\sqrt[5]{\frac{1}{108}}$$

（三）x^2+xy+y^2-3x+3

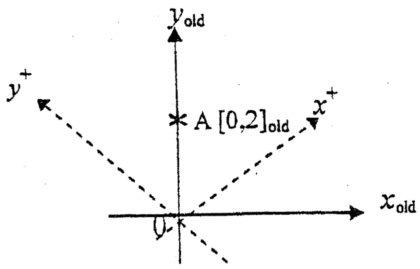
配方得 $\left(x+\frac{y-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2$

故 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x+3\geq 0$

當 $f(x,y)=0$，則 $x+\frac{y-3}{2}=0$，$y+1=0$

故只有唯一一點 $(-1,2)$ 使得 $f=0$

（四）如圖，x_{old}, y_{old} 為舊坐標軸
以 $[*,*]_{old}$ 表示舊坐標及
以 $[*,*]_{new}$ 表示今坐標。
若 $[a,b]_{new}$ 為一點之今坐標，
定義一新坐標 $[a^+,b^+]^+$
其中 $a^+=a-1,\quad b^+=b+2$。



則新坐標與舊坐標原點相同。而 A 點之新坐標為 $[2,1]^+$。

因為 A 點落在新坐標系統中的第一象限，新坐標軸，x^+－軸與 y^+－軸，正如圖所示。

易知 $[0,1]_{old}=\left[1,\frac{1}{2}\right]^+$，設 $[1,0]_{old}=[a,b]^+$

則 $[a,b]^+$ 與 $\left[1,\frac{1}{2}\right]^+$ 垂直且長度相等，所以

$$a+\frac{b}{2}=0, \quad a^2+b^2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

由此，解得 $a=\pm\frac{1}{2}$,但$a=-\frac{1}{2}$從圖可知不合，故$a=\frac{1}{2}$，$b=-1$。

因此 $[x,y]_{old}=x[1,0]_{old}+y[0,1]_{old}$

$$=x\left[\frac{1}{2},-1\right]^{+}+y\left[1,\frac{1}{2}\right]^{+}$$

$$=\left[\frac{x}{2}+y,-x+\frac{y}{2}\right]^{+}=\left[\frac{x}{2}+y+1,-x+\frac{y}{2}-2\right]_{new}$$

而金庫之新坐標為$\left[\frac{1}{2},-\frac{17}{2}\right]$。