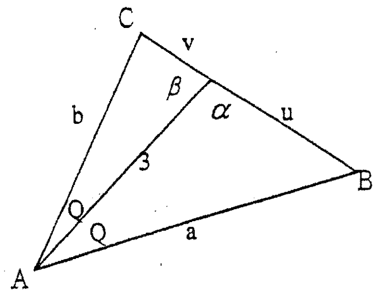
教育部九十一學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）【參考解答】

（一）由正弦定律得



$$\frac{u}{\sin Q}=\frac{a}{\sin\alpha},\frac{v}{\sin Q}=\frac{b}{\sin\beta}$$

故 $\frac{v}{u}=\frac{b}{a}=r$

$ab=15,\quad r=\frac{15}{a^2}$ …………(1)

由餘弦定律得

$u^2=a^2+3^2-6a\cos Q$ …………(2)

$v^2=b^2+3^2-6b\cos Q$ 即 $r^2u^2=r^2a^2+3^2-6r\cos Q$ …………(3)

$[(2)-(3)]\div(1-r):(1+r)n^2=(1+r)a^2-6a\cos Q$ …………(4)

$(4)-(1+r)(2):0=-(1+r)3^2+6ra\cos Q$

$$\cos Q=\frac{3^2(1+r)}{6ra}=\frac{3(1+r)}{2ra}$$

$$\cos^2 Q=\frac{9(1+r)^2}{4r^2a^2}=\frac{9(1+r)^2}{4\times15r}=\frac{3(1+r)^2}{20r}$$

$$\cos 2Q=2\cos^2 Q-1=\frac{3(1+r)^2}{10r}-1=\frac{3}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\sqrt{r}\right)^2-1$$

給定 $r>0$，若 $\frac{3(1+r)^2}{20r}<1$，則可解出 $0\le Q<90^\circ$ 及 a,b,u,v。可驗證

$(u+v)^2=a^2+b^2-2ab\cos 2Q$，故對應此 r，有一 ΔABC 滿足給定的條件。

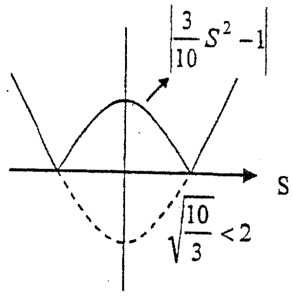
ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}ab\sin 2Q=\frac{15}{2}\sin 2Q$，求其最大可能，可先求 $|\cos 2Q|$ 最小時 r 之值。

令 $S=\sqrt{r}+\frac{1}{\sqrt{r}}$，則 $S\ge 2$

由右圖知當 $S=2$ $(r=1)$ 時，$|\cos 2Q|=\left|\frac{3}{10}S^2-1\right|$ 達到極小，此時 $|\cos 2Q|=\frac{1}{5}$

故最大可能面積為

$$\frac{15}{2}\sin 2Q=\frac{15}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=3\sqrt{6}\text{ 。}$$



（二）設三角形三邊長為 $a\ge b\ge c>0$，$a,b,c\in N$。

三角形面積公式：$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

因面積為正整數，所以 s 亦為正整數。

觀察 $(s-a)+(s-b)+(s-c)=3s-2s=s$，

因此 $10\ge\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ge\sqrt{3(s-a)^4}$，

$(s\ge s-c\ge s-b\ge s-a)$

所以 $0<s-a\le 2$。

(i) $s-a=1$

此時 $10\ge\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ge\sqrt{2(s-b)^3}$，

$\therefore\quad s-b\le 3$

當 $s-b=1$，則面積形如 $\sqrt{A(A+2)}$，$A=s-c$，

但 $A<\sqrt{A(A+2)}<(A+1)$，故 $\sqrt{A(A+2)}\notin N$。

當 $s-b=2$，則面積形如 $\sqrt{2A(A+3)}$，$A=s-c$

由 $10\ge\sqrt{2A(A+3)}$，知 $5\ge A$。

而只有當 $A=3$ 時 $\sqrt{2A(A+3)}$ 為一整數，

此時 $a=5,b=4,c=3$

當 $s-b=3$，則面積形如 $\sqrt{3A(A+4)}$，$A=s-c$，

由 $10\ge\sqrt{3A(A+4)}$，知 $A\le 4$，但皆不合所求。

(ii) $s-a=2$

此時　$10 \ge \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \ge \sqrt{4(s-b)^3}$，

$\therefore \quad s-b \le 2$　，但 $s-b \ge s-a = 2$

故 $s-b=2$，此時面積形如 $\sqrt{4A(A+4)}$，

但　$(A+1)^2 < \sqrt{A(A+4)} < (A+2)^2$，

$\therefore \quad \sqrt{A(A+4)} \notin N$　，不合所求。

因此，滿足條件之 (a,b,c) 只有一組 $(3,4,5)$。

（三）首先構造一個數列 $\{x_n\}$，使 $x_0=0$，$x_{n+1}=x_n^2+1$。

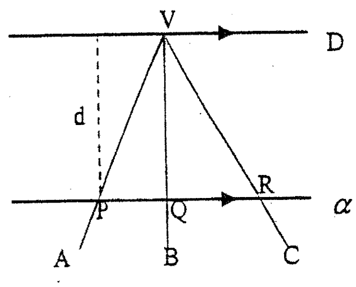
顯然 $\{x_n\}$ 是由不同的非負整數組成的遞增數列。下面我們把數列 $\{x_n\}$ 與要求的 $p(x)$ 聯繫起來。顯然有 $p(x_0)=p(0)=0=x_0$。
由此式及題設自然的提出一個猜想：$p(x_K)=x_K$。
若 $p(x_K)=x_K$，我們證明 $p(x_{K+1})=x_{K+1}$，

因為　$x_{K+1}=x_K^2+1, p(x^2+1)=p^2(x)+1$，

所以　$p(x_{K+1})=p(x_K^2+1)=p^2(x_K)+1=x_K^2+1=x_{K+1}$。

根據數學歸納法原則，對於一切自然數 n，$p(x_n)=x_n$。
再由多項式恆等定理得 $p(x)=x$。

（四）$\dfrac{\overline{PR}}{\overline{RQ}} = \dfrac{\overline{VP}\sin\angle AVC}{\overline{VQ}\sin\angle CVB}$



另外　$\dfrac{\sin\angle AVD}{\sin\angle DVB} = \dfrac{\dfrac{d}{\overline{VP}}}{\dfrac{d}{\overline{VQ}}} = \dfrac{\overline{VQ}}{\overline{VP}}$

所以　$\dfrac{\sin\angle AVC}{\sin\angle CVB}\cdot\dfrac{\sin\angle DVB}{\sin\angle AVD}$

$= \dfrac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}\cdot\dfrac{\overline{VQ}}{\overline{VP}}\cdot\dfrac{\overline{VP}}{\overline{VQ}} = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}.$