# 教育部九十學年度高級中學數學競賽

## 台中區複賽試題（二）【參考解答】

一、級數和$=4n^2+25n$。。若$4n^2+25n=k^2$，則$n>1$。因此$k^2>4n^2$，進而$k>2n$。

令$k=2n+a$，其中$a>0$，則由$4n^2+25n=(2n+a)^2$得$a^2=(25-4a)\cdot n$，由此得

$25-4a>0$，故$1\le a\le 6$。當$a=6$，$n=36$；當$a=5$，$n=5.$

二、由柯西不等式知等號相等表示

$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$，故$(k,k,k)$，$k\in \mathbb{Z}$為所有解。

三、$\dfrac{0.5\times 0.99}{0.5\times 0.99+99.5\times 0.01}=\dfrac{495}{1490}=\dfrac{99}{298}=0.33$

四、可求出前$n$項之和$f(n)$等於$\begin{cases}\dfrac{n^2}{4} & n \quad even\\ \dfrac{n^2-1}{4} & -n \quad odd\end{cases}$

注意到$x+y$和$x-y$有相同的奇偶性，所以

$$f(x+y)-f(x-y)=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=xy.$$

五、令$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=R$

$$\because \frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=\frac{\Delta OBC}{\Delta ABC}+\frac{\Delta OAC}{\Delta ABC}+\frac{\Delta OAB}{\Delta CAB}=1$$

$$\therefore \frac{OA_1}{OA_1+R}+\frac{OB_1}{OB_1+R}+\frac{OC_1}{OC_1+R}=1$$

$$\therefore \frac{R}{OA_1+R}+\frac{R}{OB_1+R}+\frac{R}{OC_1+R}=2$$

因為$\left(\dfrac{R}{OA_1+R}+\dfrac{R}{OB_1+R}+\dfrac{R}{OC_1+R}\right)\left(\dfrac{OA_1+R}{R}+\dfrac{OB_1+R}{R}+\dfrac{OC_1+R}{R}\right)\ge 9$

$$\therefore 2\left(3+\frac{OA_1+OB_1+OC_1}{R}\right)\geq 9$$

$$\therefore OA_1+OB_1+OC_1\geq \frac{3}{2}R$$