

# 教育部九十學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（二）

編號：\_\_\_\_\_

（學生自填）

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題，滿分為二十一分
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、若  $29 + 37 + 45 + \dots + (8n + 21)$  為一整數的平方，求  $n$ 。  
(4分)

二、求  $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}$  的所有整數解。  
(4分)

三、假設在某一族群中，有百分之零點五的人患有某種疾病，而有一種試劑A可以用  
(4分)來檢驗人體是否患有此種疾病。假設試劑A的檢驗結果正確率為百分之九十九，  
也就是說，在罹患這種疾病的人群中，以試劑A檢查會有百分之九十九的人被判  
定有病；而在沒有罹患這種疾病的人群中，以試劑A檢查會有百分之九十九的人  
被判定沒有病。在上述兩種情況中，都會有百分之一的人被誤判。如果現在有個  
人被試劑A檢驗出有這種疾病，試問這個人真的患有這種疾病的機率是多少？

四、考慮數列  $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots$ ，不難看出此數列的一般項  $a_n$  可由下列公式給出：  
(4分)

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{若 } n \text{ 為偶數} \\ \frac{(n-1)}{2} & \text{若 } n \text{ 為奇數} \end{cases}$$

設  $f(n)$  表示上述數列前  $n$  項之和。試證：若  $x$  和  $y$  是正整數且  $x > y$ ，則

$$f(x+y) - f(x-y) = xy.$$

五、 $\triangle ABC$  為銳角三角形，外心為  $O$ ，直線  $AO, BO, CO$  分別交對邊於  $A_1, B_1, C_1$   
(5分)

求證： $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} \geq \frac{3}{2} \overline{OA}$

