教育部九十學年度高級中學數學科能力競賽複賽

90 學年度台南區數學競試（I）【參考解答】

1、設雙曲線方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，焦點座標 $(\pm c,0)$，且 $c^2=a^2+b^2$，

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x-c) \end{cases}$$ 解得 P、Q 的座標。

再由 $\overline{OP}\perp\overline{OQ}$，解得 $b^2=3a^2$ $\therefore c=2a$

又由 $\left|\overline{PQ}\right|=4$ 解得 $a^2=1$

$\therefore$ 方程式為 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

2、

$$\begin{aligned} m^2 &= x^4+6x^3+11x^2+3x+31 \\ &=(x^2+3x+1)^2-3(x-10) \end{aligned}$$

若 $x=10$ 則 $m^2=131^2$

又證明 $x=10$ 為唯一的解：

（1）$x>10$，則 $3(x-10)=(x^2+3x+1)^2-m^2\geq 2\left|x^2+3x+1\right|-1$（不合）

（2）$x<10$，則 $3(x-10)=m^2-(x^2+3x+1)^2\geq 2|m|-1>2\left|x^2+3x+1\right|-1$

$\therefore x=2,1,0,-1,-2,-3,-4,-5,-6$ 成立，但無一值使得 $x^4+6x^3+11x^2+3x+31$ 為整數的平方。

故 $x=10$ 為唯一的解。

3、

令 $b_i=2-a_i$，$i=1,\cdots,2001$ $S=\sum\limits_{i=1}^{2001}b_i$，$T=\sum\limits_{i=1}^{2001}{b_i}^2$

則 $(2-b_1)+\cdots+(2-b_{2001})\geq 2001$ 且

$$(4-4b_1+{b_1}^2)+\cdots+(4-4b_{2001}+b_{2001}^2)\geq(2001)^2$$

故 $S \le 2001$ 且 $T \ge (2001)^2 - 4 \times 2001 + 4S$

$\therefore T \ge (2001)^2 - 4 \times 2001 + 4S \ge (2001-4)2001 + 4S \ge (2001-4)S + 4S = 2001S \cdots (*)$

若 $b_i > 0 \quad \forall i = 1, \cdots, 2001$

則 $b_i < \sum_{i=1}^{2001} b_i = S \le 2001$，故 $T = b_1^2 + \cdots + b_{2001}^2 < 2001b_1 + \cdots + 2001b_{2001} = 2001S$

此與（*）矛盾，故必有 i 使得 $b_i \le 0$，i.e $a_i \ge 2 \quad \therefore \max\{a_1, \cdots, a_{2001}\} \ge 2$

4、

（1）$f(x) = c$ 為一常數多項式

$f(x^2) = f(x) \Rightarrow c = c^2 \Rightarrow c = 0 \text{ or } c = 1$

反之 $f(x) = 0$ 及 $f(x) = 1$，故滿足 $f(x^2) = f(x)^2$

（2）$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 為一 n 次多項式，$n \ge 1$

$f(x^2) = f(x) \Rightarrow (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)^2 = a_n x^{2n} + a_{n-1} x^{2(n-1)} + \cdots + a_1 x^2 + a_0$

比較係數：

$$\begin{cases} a_n^2 = a_n \\ 2a_n a_{n-1} = 0 \\ 2a_n a_{n-2} + a_{n-1}^2 = a_{n-1} \\ 2a_n a_{n-3} + 2a_{n-1} a_{n-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \because a_n \ne 0 \\ a_n = 1 \\ \text{and} \quad a_{n-1} = a_{n-2} = a_{n-3} = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow a_n = 1, \quad a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$

故 $f(x) = x^n$