

高雄市高級中學九十學年度數學競賽複賽試題

競試(一) 編號: _____

1. 本試卷共四題
2. 考試時間: 2 小時
3. 計算紙必須連同試卷交回
4. 不可使用計算器

一、設 $f(x)$ 為一個 2000 次多項式, 若 $f(k) = -\frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots, 2001$.
試求 $f(2002)$ 的值。

二、若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 試證: $\sec^8 x + \csc^8 x + \sec^8 x \csc^8 x \geq 288$; 試問等號成立的充要條件為何?

三、設 n 為非負整數, 若有 n 個字母 a 與 $n+1$ 個字母 b , 將這 $2n+1$ 個字母排在一起形成連續的 $2n+1$ 個字母, 試證: 必存在一個 b , 將其他的 $2n$ 個字母分成兩段, 使得其左半段裡的 a 的個數與 b 的個數相同且右半段裡的 a 的個數與 b 的個數亦相同。

四、已知四邊形 $ABCD$ 內接於一圓 O , 二對角線 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, 且 E 為 $\overline{AB}$ 上一點, 如圖所示, 試證: $\frac{1}{2}\overline{CD} \leq \overline{OE}$.