教育部九十學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）【參考解答】

1. 證明：

“必要”：因為兩根乘積的絕對值小於1，所以$B<1$。又首項係數為正，所以 $P(1)>0$ 且 $P(-1)>0$。“充份”：因為$1+A+B=P(1)>0$且 $1-A+B=P(-1)>0$，兩項相加得$B>1$，所以$|B|<1$，所以兩根乘積的絕對值小於1。因為$P(1)>0, P(-1)>0$且又首項係數為正，所以兩根乘積的絕對值小於1。

2. (1) $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2u\cdot v+\|v\|^2\le\|u\|^2+2\|u\|\|v\|+\|v\|^2=(\|u\|+\|v\|)^2$

(2)
$$\|cu+(1-c)v-u_1\|=\|cu+(1-c)v-(cu_1+(1-c)u_1)\|$$
$$\le c\|u-u_1\|+(1-c)\|v-u_1\|.$$

同理， $\|cu+(1-c)v-u_2\|\le c\|u-u_2\|+(1-c)\|v-u_2\|.$

所以 $\|cu+(1-c)v-u_1\|+\|cu+(1-c)v-u_2\|\le c8+(1-c)8=8.$

3. 當$k=1$，$a_1\ge\dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2}$

$\because a_1,\cdots,a_n\ge 0$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n\ge a_1\ge\dfrac{1}{2}.$

4. 令 $f_n=f(n,\text{紅},\text{紅})$為首、尾為紅的排列數，且

$f(n,\text{紅},\text{非紅})$是首為紅、尾為綠或藍之排列數。

則 $f(n,\text{紅},\text{紅})=f(n-1,\text{紅},\text{非紅})$且

$f(n,\text{紅},\text{非紅})=2f(n-1,\text{紅},\text{紅})+f(n-1,\text{紅},\text{非紅})$，其中$n\ge 3$

所以 $f(n,\text{紅},\text{紅})=2f(n-2,\text{紅},\text{紅})+f(n-2,\text{紅},\text{非紅})$
$$=2f(n-2,\text{紅},\text{紅})+f(n-1,\text{紅},\text{紅})$$

我們因此得到 $f_2 = f(2,紅,紅) = 0, f_3 = f(3,紅,紅) = 2$，且 $f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2}$.

令 $g_n = f_n + f_{n-1}$，則 $g_3 = 2$ 且 $g_n = 2g_{n-1}$，

所以 $g_n = 2^{n-2}$，其中 $n \geq 3$.

$$2^{n-2} = f_n + f_{n-1} \cdots\cdots (n)$$

$$2^{n-3} = f_{n-1} + f_{n-2} \cdots\cdots (n-1)$$

$$\vdots$$

$$2 = f_3 + f_2 \cdots\cdots (3)$$

n偶，$f_n = (2^{n-2} - 2^{n-3}) + (2^{n-4} - 2^{n-5}) + \cdots + (2^2 - 2)$

$$= 2^{n-3} + 2^{n-5} + \cdots + 2 = \frac{2}{3}\left[2^{n-2} - 1\right] = \frac{2}{3}\left[2^{n-2} + (-1)^{n-1}\right]$$

n奇，$f_n = 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2 = \frac{2^2}{3}\left[2^{n-3} - 1\right] + 2 = \frac{2}{3}\left[2^{n-2} + (-1)^{n-1}\right]$

（註： 用組合數表示 $f_n = \sum_{t=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-t}{t} 2^t$ ）