教育部九十學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）

編號：____________

（學生自填）

（時間二小時）

注意事項：

1.本試卷共四題，滿分為四十九分。

2.不可使用計算器。

3.請將答案寫在答案欄內。

4.計算紙必須連同試卷交回。

一、（12 分） 證明實係數多項式 $P(x)=x^2+Ax+B$ 之實根及虛根的絕對值都小於 1 的充分及必要條件為 $B-1<0<\min\{P(1),P(-1)\}$。

二、 對於每一個 $u=(x,y,z)\in R^3$，我們定義 $\|u\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

(1)（6 分）證明對於任何 $u\in R^3, v\in R^3, \alpha\in R$，下列必真：

$$\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|,$$

$$\|\alpha u\|=|\alpha|\|u\|.$$

(2)（7 分）令 $u_1=(-2,0,0)$，$u_2=(2,0,0)$ 及 $A=\{u\in R^3:\|u-u_1\|+\|u-u_2\|\le 8\}$.

證明若 $u\in A, v\in A, c\in[0,1]$，則 $cu+(1-c)v\in A$。

三、（12 分） 令 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 為非負實數且對於所有正整數 $k\le n$ 滿足 $a_1\times a_2\times\cdots\times a_k\ge\dfrac{1}{(2k)!}$。

證明下列不等式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\ge\frac{1}{2}.$$

四、（12 分） 將 2001 個格子排成一列，每個格子從左至右塗上紅色、綠色或藍色，但相鄰之格子顏色不同，且首、尾格均塗以紅色。那麼，有多少種塗顏色的方法？