高屏地區高級中學九十學年度數學競賽複賽試題

競試 (二)　　編號:____________________

1. 本試卷共五題
2. 考試時間: 1 小時
3. 計算紙必須連同試卷交回
4. 不可使用計算器

一、試證: $\dfrac{1}{2001} < \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2000}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2001} < \dfrac{20\sqrt{10}}{2001}$.

二、若多項式 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{11}$ 的展開式為 $1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{43}x^{43}+x^{44}$, 試求實數 a_2 之值。

三、$\triangle ABC$ 中, D 及 E 點分別為二邊 $\overline{BC}$ 及 $\overline{AC}$ 的中點; 若 $\overline{AD}$ 及 $\overline{BE}$ 互相垂直交於 P 點, 且 $\cos C = \frac{4}{5}$, 試判斷 $\triangle ABC$ 的形狀。

四、設 $n \geq 2$ 為一正整數, 試證: 必存在相異的正整數 x, y, z 滿足 $xyz - n(xy+yz+zx) = 0$.

五、設 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2001} k^n$,

1. 試證: 當 n 為奇數時, S_n 不能被5整除。
2. 試問: 當 n 為偶數時, 是否 S_n 能被5整除?