教育部八十九學年度高級中學數學競賽

台中區試題一解答

一、觀察

$$5511 \div 11 = 501$$
$$555111 \div 111 = 5001$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{55\cdots5}_{100\text{個}}\underbrace{111\cdots1}_{100\text{個}} \div \underbrace{111\cdots1}_{100\text{個}} = 5\underbrace{00\cdots0}_{99\text{個}}1$$

$$501 \div 3 = 167$$
$$5001 \div 3 = 1667$$
$$\vdots$$
$$5\underbrace{000\cdots0}_{99\text{個}}1 \div 3 = 1\underbrace{66\cdots6}_{99\text{個}}7$$

$$\underbrace{111\cdots1}_{100\text{個}1} = \underbrace{1111\cdots11}_{50\text{個}11} = \underbrace{11111111\cdots1111}_{25\text{個}1111}$$

$$1111 \div 11 = 101$$
$$11111111 \div 11 = 1010101$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{111111\cdots11}_{25\text{個}1111} \div 11 = \underbrace{1010\cdots}_{24\text{個}1010}101$$

$$101 \div 101 = 1$$
$$1010101 \div 101 = 10001$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{1010\cdots101}_{24\text{個}1010} \div 101 = \underbrace{10001000\cdots}_{24\text{個}1000}1$$

$$1111 \div 1111 = 1$$

或 $$11111111 \div 1111 = 10001$$
$$\underbrace{1111\cdots1111}_{25\text{個}1111} \div 1111 = \underbrace{10001000\cdots}_{24\text{個}1000}1$$

因此 $$\underbrace{55\cdots5}_{100\text{個}}\underbrace{111\cdots1}_{100\text{個}} = 3 \times 11 \times 101 \times 1\underbrace{0001000\cdots}_{24\text{個}}1 \times 1\underbrace{666\cdots6}_{99\text{個}}7$$

另解1： $$\underbrace{1666\cdots67}_{99\text{個}} \div 7 = 238\underbrace{095238095\cdots}_{16\text{個}095238}2381$$

二、 $\left|\sum c_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{2}\right|$

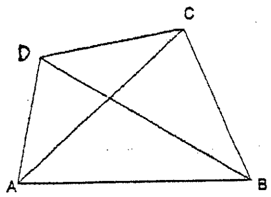
$$= \left|\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) - \sum \frac{(x_i + x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\left[c_i - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right](x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left|c_i - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right|(x_i - x_{i-1})$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{200}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{200}$$

三、證



採用複數平面，有等式如下：

$$(A-B)(C-D)+(D-A)(C-B)=(C-A)(D-B)$$

取絕對值

$$|C-A||D-B| \le |B-A||D-C| + |D-A||C-B|$$

四、令 $u = x - y$ 且 $v = x + y$，則

$$f(u)f(v) = ug(v) \quad ,\forall u,v \in R$$

令 $u=1$ ： $f(1)f(v)=g(v), \quad \forall v \in R \quad -(1)$

令 $v=1$ ： $f(u)f(1)=ug(1), \quad \forall u \in R \quad -(2)$

由(1),(2)得 $f(u)f(1)=ug(1)=uf(1)^2$

(i) 若 $f(1)\ne 0$，$f(u)=f(1)u=mu$，其中 $m=f(1)$

(ii) 若 $f(1)=0$，則由(1)得 $g(v)=0$，$\forall v \in R$

因此 $f(u)f(v)=ug(v)=0$，$\forall u,v \in R$

$$f(u)^2 = f(u)f(u) = 0$$

$$\therefore f(u)=0 \quad \forall u \in R$$