

教育部八十九學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）

編號：_____

（時間二小時）

（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題，每題十分，滿分為四十分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

一、令正整數 N 為一個 200 位的數字，從左至右算起，它的前 100 位皆為 5 而後 100 位皆是 1。請將 N 分解成五個大於 1 的整數乘積。（請正確表示數字）

二、設 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ ，且

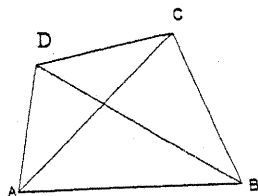
$$0 < x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{100}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

證明

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{200},$$

其中 $x_{i-1} < c_i < x_i$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

三、對任意的四邊形 $ABCD$ ，證明 $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ 。



四、找出所有從實數映至實數的函數 f 和 g 使得

$$f(x+y)f(x-y) = (x-y)g(x+y)$$

對所有的實數 x, y 都成立。