

高級中學數學及自然學科能力競賽

數學科筆試(二)試題

編號：_____ (學生自填)

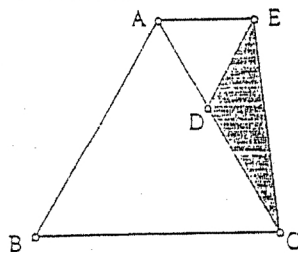
注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，每題 3.5 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1. 設 a 與 b 為實數，且 $a^3 - 3ab^2 = 44$ 、 $b^3 - 3a^2b = 8$ ，則 $a^2 + b^2 =$ _____ (一)。

2. 已知 P 是正方形 $ABCD$ 內部的一點，若 $\overline{PA} = \sqrt{2}$ 、 $\overline{PB} = 1$ 、 $\overline{PC} = 2$ ，則正方形 $ABCD$ 的邊長為 _____ (二)。

3. 下圖中， $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 均為正三角形。若兩正三角形的面積之和為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，則 $\triangle CDE$ 的面積之最大值為 _____ (三)。



4. 在坐標平面上，橫坐標與縱坐標均為整數的點稱為格子點。對任意自然數 n ，連接原點與點 $A_n(n, n+5)$ ，若此線段上除兩端點外的格子點共有 $f(n)$ 個，則 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2000) =$ _____ (四)。

5. 已知 $P(2, 2)$ 是橢圓 $\Gamma: 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ 內部的一點，直線 L 通過點 P 而與橢圓 Γ 相交於點 A 、 B 。若點 P 是 $\overline{AB}$ 的中點，則兩交點 A 與 B 的坐標為 _____ (五)。

6. 將 89 個 x 的多項式 $1 + nx^{5^n}$ ($n = 1, 2, \dots, 89$) 相乘，令其乘積的展開式為

$$\prod_{n=1}^{89} (1 + nx^{5^n}) = 1 + a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \cdots + a_mx^{k_m},$$

其中每個 a_i 與 k_i 都是正整數，且 $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ ，則 $(a_{89}, k_{89}) =$ _____。