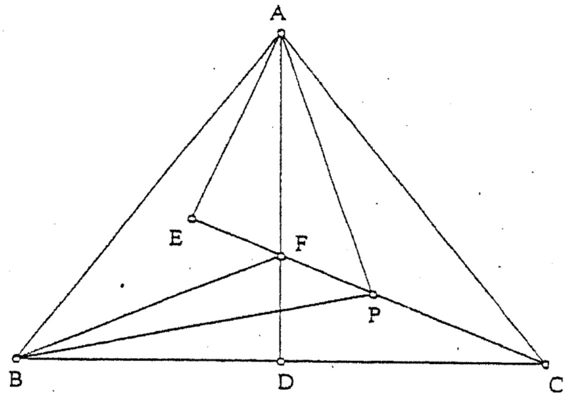
台北市高級中學八十九學年度
數學科能力競賽筆試(一)　參考解答

參考解答】

問題一：設$\triangle ABC$滿足$\overline{AB}=\overline{AC}$。若點$P$是$\triangle ABC$內部一點，$\angle PCB=2\angle PBC$，$\angle ACP=30^\circ$，試證$\angle BAC=4\angle PAC$。



證：過A分別作直線BC與直線CP的垂直線，設垂足分別爲D與E，又設直線AD與直線CP交於F。在直角$\triangle AEF$與直角$\triangle CDF$中，因爲$\angle AFE=\angle CFD$，所以$\angle EAF=\angle DCF$。更進一步由$\overline{FB}=\overline{FC}$得$\angle EAF=\angle DCF=\angle DBF$。於是，$\triangle AEF$與$\triangle BDF$相似，因而得$\overline{AE}:\overline{AF}=\overline{BD}:\overline{BF}$。因爲$\overline{BP}$平分$\angle CBF$，所以，$2\overline{BD}:\overline{BF}=\overline{BC}:\overline{BF}=\overline{PC}:\overline{PF}$。在直角三角形$\triangle ACE$中，因爲$\angle ECA=30^\circ$，所以，$\overline{AC}=2\overline{AE}$。由此得$\overline{AC}:\overline{AF}=2\overline{AE}:\overline{AF}=2\overline{BD}:\overline{BF}=\overline{PC}:\overline{PF}$。於是，$\overline{AP}$平分$\angle DAC$。因爲$\angle BAC=2\angle DAC$，所以，$\angle BAC=4\angle PAC$。 ‖

附錄二 #4. 設 m 個互異的正偶數與 n 個互異的正奇數的總和爲 2000，對所有這樣的 m,n，3m+4n 的最大值爲 ＿222＿ 。

解：1. 由假設

$$2000\ge(2+4+6+\dots+2m)+(1+3+5+\dots+(2n-1))$$
$$=m(m+1)+n^2=(m+\frac{1}{2})^2+n^2-\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow(m+\frac{1}{2})^2+n^2\le 2000.25$$

2. 利用歌西不等式得

$$3m+4n=3(m+\frac{1}{2})+4n-\frac{3}{2}$$
$$\le 5\sqrt{(m+\frac{1}{2})^2+n^2}-\frac{3}{2}$$
$$\le 5\sqrt{2000.25}-\frac{3}{2}=5\times 44.72..-1.5=223.6-1.5=222.1....$$

3. 因 m,n 均爲正整數且 3m+4n=222 有解，故 3m+4n 之最小值爲 222。

問題(三). 將自然數$1,2,3,\cdots,n$重新排成一列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$. 設有A_n種滿足以下條件的排法:

$$a_k \le k+1,\ \forall\, k=1,2,3,\cdots,n-1.$$

再設其中有B_n種排法又滿足以下的條件:

$$a_k \ge k-1,\ \forall\, k=2,3,\cdots,n.$$

試求所有的正整數n, 使得$\frac{B_n}{A_n} \le \frac{1}{4}$.

[解答]：顯然$A_1=1$. 由$a_1 \le 2$, 得$a_1=1$或2. 當$a_1=1$時, 有A_{n-1}種滿足條件的排法. 當$a_1=2$時, $a_2=1$或3; 此時將1和2看成一體, 得知此情況下也有A_{n-1}種滿足條件的排法. 因此, $A_n=2A_{n-1}$, $\forall\, n=2,3,\cdots$. 由此可得, $A_n=2^{n-1}$, $\forall\, n=1,2,3,\cdots$.

另一方面, 顯然$B_1=1$. 由$a_n \ge n-1$, 得$a_n=n-1$或n. 當$a_n=n$時, 有B_{n-1}種滿足條件的排法. 當$a_n=n-1$時, $a_{n-1}=n$ (因爲$a_k \le k+1 \le n-1$, $\forall\, k=1,2,\cdots,n-2$); 得知此情況下有$B_{n-2}$種滿足條件的排法. 因此, $B_n=B_{n-1}+B_{n-2}$, $\forall\, n=3,4,\cdots$. 由此可得, $\langle B_n \rangle$是一費氏數列, 即

$$B_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \right),\ \forall\, n=1,2,3\cdots.$$

因此,

$$\frac{B_n}{A_n}\ :\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{16},\ \frac{13}{32},\ \frac{21}{64},\ \frac{34}{128},\ \frac{55}{256},\ \cdots.$$

顯然, 當$n=1,2,3,4,5,6,7,8$時, $\frac{B_n}{A_n} > \frac{1}{4}$; 而$n=9$時, $\frac{B_n}{A_n} \le \frac{1}{4}$. 注意: $B_n=B_{n-1}+B_{n-2} \le 2B_{n-1}$, $\forall\, n=3,4,\cdots$. 因此,

$$\frac{B_n}{A_n} \le \frac{2B_{n-1}}{2A_{n-1}} \le \cdots \le \frac{B_9}{A_9} \le \frac{1}{4},\ \forall\, n \ge 10.$$

故所求的正整數$n=9,10,11,\cdots$.