

臺北市八十九學年度
高級中學數學及自然學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

問題一：設 $\triangle ABC$ 滿足 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。若點 P 是 $\triangle ABC$ 內部的一點， $\angle PCA = 30^\circ$ ， $\angle PCB = 2\angle PBC$ ，試證 $\angle BAC = 4\angle PAC$ 。(16 分)

問題二：設有 m 個相異的正偶數與 n 個相異的正奇數之總和為 2000。對於所有此種正整數 m 與 n ，試求 $3m + 4n$ 的最大值。(16 分)

問題三：在自然數 $1, 2, \dots, n$ 的 $n!$ 種排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中，令滿足

$$a_k \leq k+1 \quad (\forall k=1, 2, \dots, n)$$

的排列共有 X_n 種；而滿足

$$k-1 \leq a_k \leq k+1 \quad (\forall k=1, 2, \dots, n)$$

的排列共有 Y_n 種。

(1) 試求 X_5 與 Y_5 的值。(5 分)

(2) 試求出所有滿足 $\frac{Y_n}{X_n} \leq \frac{1}{4}$ 的正整數 n 。(12 分)