教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽複賽

台南地區試題（二）

問題（一）　　參　考　解　答

令 x=0, y=0,得 $f(0)+f(0)=(f(0))^2$

所以 $f(0)(f(0)-2)=0,$

因爲 $f(0)\neq 0$ ，所以 $f(0)=2.$

令 x=0 帶入，得 $f(y)+f(-y)=f(0)f(y)=2f(y)$

$$\therefore f(y)=f(-y)\quad \forall y\in R$$

$$\therefore f(x)=f(-x)\quad \forall x\in R$$

問題（二）　　參　考　解　答

If $11 | a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ ，

則 $a_1+a_3+a_5-(a_2+a_4+a_6)$ 爲 11 的倍數。

又 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0+1+2+3+4+5=15,$

且 $a_1+a_3+a_5$ 及 $a_2+a_4+a_6$ 最大値爲9，最小値爲 -9 。

所以 $a_1+a_3+a_5=a_2+a_4+a_6=7.5$ ，

但 $a_1+a_3+a_5, a_2+a_4+a_6$ 爲整數，故矛盾。

故此六位數不存在。

問題（三）　參 考 解 答

<u>方法一：</u>利用正弦定理

設三個角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 及邊長 a, b, c 成等差，

則 $\angle A + \angle C = 2\angle B$， a+c=2b，

$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 60^\circ, \angle A + \angle C = 120^\circ.$

由正弦定理知：$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$，

所以 2R sinA+2R sinC = 2×2R sinB $\Rightarrow \sin A + \sin C = 2\sin B$

所以 $2\sin 60^\circ \cos\dfrac{A-C}{2} = 2\sin 60^\circ$

所以 $\cos\dfrac{A-C}{2} = 1$，則 $\dfrac{A-C}{2} = 0$ 或 π。

<u>方法二：</u>利用餘弦定理

問題（四）　參 考 解 答

令半徑＝x，高為 h，

則 V＝$2000\pi = (\pi x^2)h$，

所以 $x^2h=2000$ ，$h=\dfrac{2000}{x^2}$

表面積＝$2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi(x^2 + \dfrac{2000}{x}) = f(x)$

$f'(x) = 2\pi(2x - \dfrac{2000}{x^2}) = 0,$

$x^3 - 1000 = 0, \Rightarrow x = 10.$

問題（五）　參 考 解 答

$xy+3x-y=20,$

化成 (x-1)(y+3)=17，

(x-1) and (y+3) 爲整數，

得 (x-1)= ±1 或 ±17，

(y+3)= ±17 或 ±1，

則 (x,y)=(- 16,- 4) or (0, - 20) or (2, 14) or (18, - 2).

問題（六）　參 考 解 答

令 N 爲原點，且 MN 爲 y 軸，

假設拋物線方程式爲 $y=ax^2$，

將 A(- 6, - 4) and B(6, - 4)帶入求出 a 值，

再以 D_1, D_2 之 x 座標帶入拋物線方程式求出 y 值，

即可求出 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_4D_4}=\dfrac{20}{9}$ and $\overline{C_2D_2}=\overline{C_3D_3}=\dfrac{32}{9}$