教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽複賽

台南地區試題(一)

注意事項：

(1) .考試時間：2小時

(2) .不可使用計算器。

問題(一)、

1. 設二次函數 $p(x) = x^2 + ax + b$, 其中 a, b 為任意整數，試證：對於任一整數 n, 必存在一整數 m 使得 $p(n)p(n+1) = p(m)$.

2. 設 a 為任意整數，試證：

$$\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15} \qquad \text{恆為一整數。}$$

問題(二)、試證：

$$1998 < \sum_{n=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2000.$$

問題(三)、在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB} = 1, \overline{AC} = 1$ 且 $\overline{BC} = \sqrt{2}$. 將各邊都分成 n 等分，過任意兩邊上之各分點，連接對應的分點使其平行於第三邊，將 $\triangle ABC$ 分成許多個小三角形。每一個小三角形的頂點各放置一個實數，必須使得由有公共邊的兩個小三角形組成的平行四邊形中，其兩組對應頂點上放置的實數之和相等，若 A, B, C 三頂點上放置的數分別是 a, b, c, 則

1. 放置最大數的點與放置最小數的點之間的距離為多少？
2. 所有各頂點上放置的數之總和為多少？

問題(四)、已知一數列 $\{a_n\}$, 其中 $a_0 = 1, a_1 = 2$, 若

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 - 1}{a_{n-2}}, \quad n = 2, 3, 4, \cdots$$

試證：a_n 皆為整數，$n = 2, 3, 4, \cdots$；並求 $\sum_{n=0}^{2000} a_n$ 的值。