臺灣省第四區八十九學年度

高級中學數學及自然學科能力競賽

數學科筆試（一）參考解答

問題一：(1)解方程式$4x^3-3x+\frac{1}{2}=0$ 。（8分）

(2)求$\sec\frac{2\pi}{9}+\sec\frac{4\pi}{9}+\sec\frac{8\pi}{9}$的值。（8分）

參考解答：

$4x^3-3x=-\frac{1}{2}$

設$\cos 3\theta=\frac{-1}{2}$，則$4\cos^3\theta-3\cos\theta=\frac{-1}{2}$

但因爲$\cos 3\theta=\frac{-1}{2}$，$3\theta=\frac{2\pi}{3}+n\pi$，

所以

(1)$\cos\frac{2\pi}{9},\cos\frac{4\pi}{9},\cos\frac{8\pi}{9}$是$4x^3-3x+\frac{1}{2}=0$的解

而$\sec\frac{2\pi}{9},\sec\frac{4\pi}{9},\sec\frac{8\pi}{9}$是$x^3-6x^2+8=0$的解

因此

(2)$\sec\frac{2\pi}{9}+\sec\frac{4\pi}{9}+\sec\frac{8\pi}{9}=6$

問題二：設點 A 與 B 是兩圓 O_1 與 O_2 的交點，直線 O_2B 與圓 O_1 的另一個交點爲 E 直線 O_1B 與圓 O_2 的另一個交點爲 F。過點 B 作直線 L 平行於直線 EF，分別交圓 O_1 與圓 O_2 於點 M 與 N，試證：$AM + AN \geq AE + AF$；並說明等號成立時，兩圓的關係。（16 分）

參考解答：

因爲 $O_1B = O_1E$ 且 $O_2B = O_2F$，可得 $\angle O_1BE = \angle O_1EB$ $\angle O_2BF = \angle O_2FB$，又 $\angle O_1BE = \angle O_2BF$，故 $\angle O_1EO_2 = \angle O_1FO_2$，由此得 E, F, O_2, O_1 四點共圓。因此，

$$\angle BFE = \angle O_1O_2B = \frac{1}{2}\angle AO_2B = \angle AFB$$

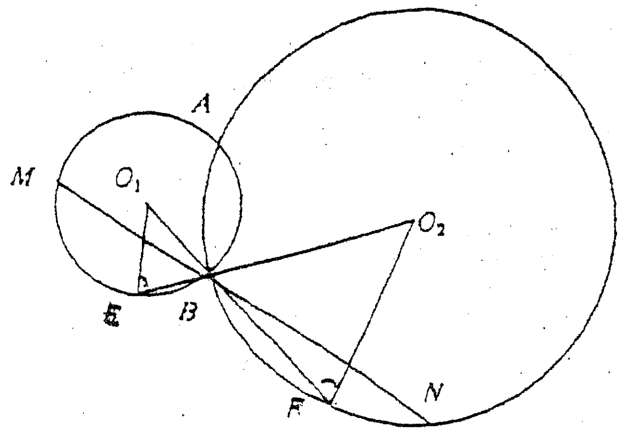
另一方面，因爲 MN 與 EF 平行，故有

$$\angle FBN = \angle BFE = \angle AFB$$

可知 $AF = BN$。同理，$AE = BM$，因此，

$$AM + AN \geq MN = MB + BN = AE + AF$$

等號成立之充要條件爲 $AM + AN = MN$，即 $A = B$，即兩圓相切。



問題三：設$\{a_n\}_{n\geq 1}$為一數列，$a_1 = 1$，$a_2 = 4$且$a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}$，$n \geq 2$。

證明：有無限多個正整數n，使得$a_n - 1$和$a_{n+1} - 1$都能被 89 整除。（17 分）

參考解答：

我們證明$\forall m \in \mathrm{N}$必存在無限多個n，使得$a_n - 1$和$a_{n+1} - 1$都能被m整除。

定義數列$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$，$a_{n-1} = a_{n+1} - 3a_n$，$\forall n \in \mathrm{Z}$，

對任意固定的正整數m，考慮$(a_k (\bmod m), a_{k+1} (\bmod m)), k \in \mathrm{Z}$。由鴿籠原理，存在兩個整數$k, l$，$k < l$，使得$a_k \equiv a_l (\bmod m)$且$a_{k+1} \equiv a_{l+1} (\bmod m)$。

因此，$a_{k+1} \equiv a_{l+1} (\bmod m)$，$\forall i \in \mathrm{Z}$。因此$\{a_n (\bmod m)\}_{n=-\infty}^{\infty}$為週期函數，又$a_0 = 1$，$a_1 = 1$，所以$a_0 \equiv 1 (\bmod m)$，$a_1 \equiv 1 (\bmod m)$，因此存在無限多個$n$，使得$a_n - 1$和$a_{n+1} - 1$都能被$m$整除。