

問題二：下圖是 1957 年於陝西西安市元代安西王府（忽必烈三兒子忙哥剌的王宮）遺址出土的幻方鐵板。鐵板上每行均由六個數字排列，組成方陣，不論縱行或橫行，或對角線上的數字，相加之和都是 111。這個蘊含著數學原理的六六幻方（魔方陣），在古代被視為奇妙的神秘之物。人們把它鄭重地裝進石函，埋入房基中，用作鎮宅和防災避邪的吉祥物。今鐵板中有八個位置的數字已經無法辨識，你能幫史學家修補好這珍貴的元代幻方鐵板嗎？（16 分）

28	4	3	31	35	10
36				11	1
7		12		22	30
8				16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

元代幻方鐵板

解：

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

元代幻方鐵板

問題三：設 P 為正方體 $ABCD-EFGH$ 內部一點，今已知

$$\overline{PA} = \sqrt{2}, \overline{PB} = \overline{PD} = \sqrt{3}, \overline{PE} = \sqrt{2}$$

試問此正方體的稜長為？（17 分）

解：1. 設此正方體的稜長為 x ，由餘弦定理知

$$\cos \angle PAE = \frac{x^2 + 2 - 1}{2\sqrt{2}x}$$

$$\cos \angle PAB = \frac{x^2 + 2 - 3}{2\sqrt{2}x}$$

$$\cos \angle PAD = \frac{x^2 + 2 - 3}{2\sqrt{2}x}$$

2. 利用 $\overline{AP}$ 的方向餘弦的平方和為 1，可得

$$\left(\frac{x^2 + 2 - 1}{2\sqrt{2}x}\right)^2 + \left(\frac{x^2 + 2 - 3}{2\sqrt{2}x}\right)^2 + \left(\frac{x^2 + 2 - 3}{2\sqrt{2}x}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 3x^4 - 10x^2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3}$$