教育部八十九學年度高級中學數學競賽

嘉義區試題二解答

一、設 $x=10a+b, y=10c+d, a,b,c,d\in Z, 1\le a,c\le 9, 0\le b,d\le 9$

列式：

$$10(a+c)+b+d=ac+bd$$

即有　$(10-a)(10-c)+(b-1)(d-1)=101$

經檢驗只有 $\begin{cases}x=15\\y=16\end{cases}, \begin{cases}x=59\\y=18\end{cases}, \begin{cases}x=58\\y=19\end{cases}$

三組符合。

二、如果 $a=-1, b\neq 0$，則對任何 $n>0, b\mid x^n+ax+b$

如果 $a\neq -1$，則

$$(1+a)x+b \mid x^n+ax+b$$

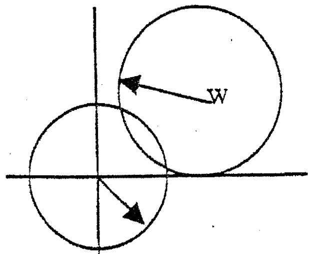
$$\Leftrightarrow \left(\frac{-b}{1+a}\right)^n+a\left(\frac{-b}{1+a}\right)+b=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-b}{1+a}\right)^{n-1}=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \quad even, & b=-(1+a)\\ n \quad odd>1, & b=\pm(1+a)\\ n=1, & b\neq 0\end{cases}$$

三、解一：因$|z_1|=|z_2|=1, w=z_1+z_2$

故$|w-z_1|=|z_2|=1$，因此



z_1 在單位圓，同時也
在以w為中心，半徑為1之圓上

因$|w|\le 2$，此兩圓相交於u,v

則$z_1=u, z_2=v$或$z_1=u, z_2=v$

解二：$z_1=x_1+y_1 i$，$z_2=x_2+y_2 i$，$w=a+bi$

$a=x_1+x_2$，$x_1^2+y_1^2=1$

$b=y_1+y_2$，$x_2^2+y_2^2=1$

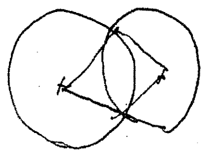
$$故\begin{cases}(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1 & -(1)\\ x_1^2+y_1^2=1 & -(2)\end{cases}$$

相減得：

$$(a^2+b^2)-2by_1=2ax_1$$

代入(2)得：

$$\frac{\left[(a^2+b^2)-2by_1\right]^2}{4a^2}+y_1^2=1$$



$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)y_1^2-\frac{b(a^2+b^2)}{a^2}y_1+\frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2}-1=0 \quad -(3)$$

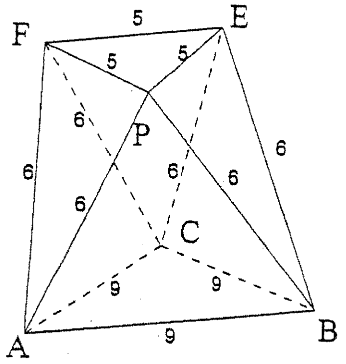
$$判別式\ \Delta=\frac{b^2(a^2+b^2)^2}{a^4}-4\left(\frac{(a^2+b^2)}{4a^2}-1\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$=4\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-\frac{1}{a^2}(a^2+b^2)^2$$

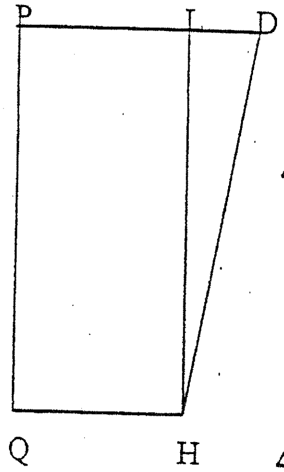
$$=\frac{1}{a^2}\left[4-(a^2+b^2)\right](a^2+b^2)\ge 0$$

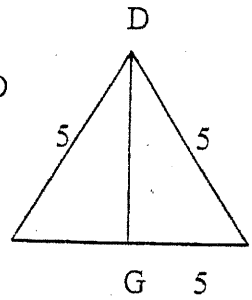
故解存在。注意(3)之兩根和為b，由此知只有唯一一組解。

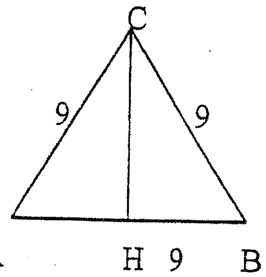
四、



設 Q 為 ABC 之重心，從 Q 作垂線垂直 ΔABC 此垂線交 ΔDEF 於 P，旋轉（沿 PQ）$120^o,240^o$，八面體仍回到原來位置，故 P 必為 ΔDEF 之重心，且 ΔDEF 與 ΔABC 在平行之平面上。







$$CH = 9\sin 60^o = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

$$QH = \frac{1}{3}CH = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$DH = 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$DP = \frac{2}{3}DG = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

$$\therefore LD = \frac{5}{3}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

$$DH^2 = 6^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{63}{4}$$

$$PQ = LH = \sqrt{PH^2 - LD^2} = \sqrt{\frac{63}{4} - \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{47}{3}}$$