教育部八十九學年度高級中學數學競賽

嘉義區試題一解答

一、觀察$(2n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdot(n+1)\cdots(2n)(2n+1)$

將$2n+2-k$與k配成一組，$k=1,\cdots,n$

並利用$(2n+2-k)k<(n+1)^2$

可知$(2n+1)!<(n+1)^{2n}(n+1)$，似乎不能成功！

故考慮$1,2n+1$與$2,2n$兩組，嘗試找出n，使得

$$1\cdot(2n+1)\cdot 2\cdot 2n<(n+1)^3$$

先找出n，使得

$$(2n+2)\cdot 2\cdot 2n<(n+1)^3$$

即　$8n<(n+1)^2=n^2+2n+1$

或　$n^2-6n+1>0$

當$n\ge 6$時，$n^2-6n+1>0$成立

故當$n\ge 6$時，$(2n+1)!<(n+1)^{2n}$

$n=1,2,3$時，不等式經檢驗不成立。

而$n=4,5$時成立。因此原不等式對$n\ge 5$成立。

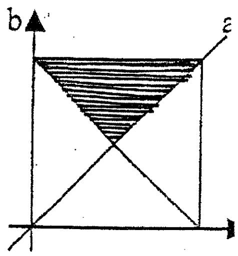
二、設取出的三根棒長分別為a,b,c其中$a<b<c$。

能構成三角形之充分必要條件為$a+b>c$。

當$c=k$時，能構成三角形的組數即為滿足

$\begin{cases}0<a<b<k\\ a+b>k\end{cases}$ 的整數解個數，也就是在ab平面中滿足

$\begin{cases}0<a<b<k\\ a+b>k\end{cases}$ 的整數點個數。



當k為偶數時，整數點個數為$N_k=1+3+5+\cdots+\left[2\left(\frac{k}{2}-1\right)-1\right]=\left(\frac{k}{2}-1\right)^2$

當k為奇數時，整數點個數為$N_k=2+4+6+\cdots+2\left(\frac{k-3}{2}\right)=\frac{(k-1)(k-3)}{4}$

$$\therefore P=\sum_{k=4}^{n}N_k\Big/\binom{n}{3}=\begin{cases}\dfrac{2n-5}{4n-4}, & n\text{為偶數}\\ \dfrac{2n^2-7n+3}{4n^2-8n}, & n\text{為奇數}\end{cases}$$

三、(a) $n=4k+1$ 時； $n=\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{2k\text{ 個}}+\underbrace{1+\cdots+1}_{2k\text{ 個}}+n$

(b) $n=4k$ 且 k 為偶數；

$$n=\underbrace{(-1)+\cdots+(-1)}_{k\text{ 個}}+\underbrace{1+\cdots+1}_{3k-2\text{ 個}}+2+2k$$

(c) $n=4k$ 且 k 為大於1的奇數；

$$n=\underbrace{(-1)+\cdots+(-1)}_{k-2\text{ 個}}+\underbrace{1+\cdots+1}_{3k\text{ 個}}+(-2)+2k$$

(d) $n=4$，若 $n=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1a_2a_3a_4$，設 $|a_1|\le|a_2|\le|a_3|\le|a_4|$

若 $|a_4|=4$，則 $|a_1|=|a_2|=|a_3|=1$， $a_1+\cdots+a_4$ 為奇數 $\neq 4$

若 $|a_4|=2$，則 $|a_3|=2$， $|a_1|=|a_2|=1$， $a_4+a_3=0$ 或 4

若 $a_3+a_4=0$，則 $a_4+a_3+a_2+a_1\neq 4$

若 $a_3+a_4=4$，則 a_3,a_4 同號， a_1,a_2 同號

故 $a_1+a_2+a_3+a_4\neq 4$

(e) $n=4k+2$，若 $n=a_1\cdots a_n$，則 $a_1\cdots a_n=2 \bmod 4$，

若有多於兩個 a_i 為偶數，則 $a_1\cdots a_n$ 能被4整除，

故只有一個 a_i 為偶數，其它 a_j， $j\neq i$ 為奇數，

因此 $a_1+\cdots+a_n$ 為奇數 $\neq 4$

(f) $n=4k+3$，若 $n=a_1\cdots a_n$，則 $a_1,\cdots,a_n$ 均為奇數

不失一般性，設 $a_1,\cdots,a_m\equiv -1 \mod 4$

$$a_{m+1},\cdots,a_n\equiv 1 \mod 4$$

$n=a_1\cdots a_n\equiv(-1)^m \mod 4$，故 m 為奇數（$\because n\equiv -1 \bmod 4$）

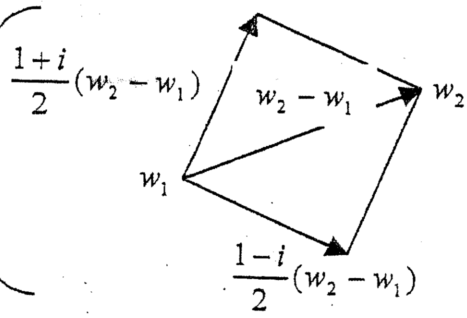
$$\begin{aligned} n=a_1+\cdots+a_n &\equiv -m+(n-m) \mod 4 \\ &= n-2m \end{aligned}$$

$$2m\equiv 0 \mod 4$$

即4整除 $2m$，$2|m$ 矛盾。

四、在複平面上，若w_1, w_2為一正方形對角線之端點，則正方形之其餘頂點為

$$\frac{1\pm i}{2}w_1+\frac{1\mp i}{2}w_2$$



如圖，其餘頂點為

$$w_1+\frac{1\pm i}{2}(w_2-w_1)$$

設A為0,B為z_1,C為z_2,D為z_3

則　P為$\frac{1+i}{2}\cdot 0+\frac{1-i}{2}\cdot z_1$

Q為$\frac{1-i}{2}\cdot z_2+\frac{1+i}{2}\cdot z_1$

R為$\frac{1-i}{2}\cdot z_3+\frac{1+i}{2}\cdot z_2$

S為$\frac{1-i}{2}\cdot 0+\frac{1+i}{2}\cdot z_3$

向量RP為$\frac{1-i}{2}(z_3-z_1)+\frac{1+i}{2}z_2$

向量QS為$\frac{1+i}{2}(z_3-z_1)-\frac{1-i}{2}z_2$

$$=i\left(\frac{1-i}{2}(z_3-z_1)+\frac{1+i}{2}z_2\right)$$

故RP，SQ垂直。