

教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽複賽

屏東區試題(二)

下列每題各佔 20 分(共五題)

1. 設 $f(x)$ 為次數大於 3 的多項式; 以 $(x-b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$, $(x-a)(x-b)$ 除 $f(x)$ 之餘式分別為 $3x-1$, $x+1$, $2x+3$. 設 $r(x)$ 為 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 之餘式. 試求 $r(x)$ 的最小值.
2. 有一最簡分數, 其分子加上某數後, 約分變為 $\frac{7}{9}$, 若是減掉此數, 再約分, 可得 $\frac{1}{2}$. 試求這個最簡分數是多少?
3. 有兩個二次方程式, 分別是 $(a-1)x^2 - (a^2+2)x + (a^2+2a) = 0$ 及 $(b-1)x^2 - (b^2+2)x + (b^2+2b) = 0$, 此處 $a, b \in \mathbb{N}$ 且 $a \neq b$, 已知它們有公共實根 r , 試求 $a^b + b^a$ 之值.
4. 設 a, b, c 分別為 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長, 若 $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, 試判斷 $\triangle ABC$ 為何種三角形?
5. 若 $a > b > 0$, 求證 $2a^2 + \frac{a}{ab-b^2} \geq 6$. 又等號成立的條件為何?