

教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽複賽

屏東區試題(一)

下列每題各佔 20 分(共五題)

P.1

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BC} = 12$, $\angle A = \frac{2}{3}\pi$. 今將 $\overline{BC}$ 等分成十段, 其

分點分別為 $P_1, P_2, \dots, P_9$, 設 $x_i = \overline{AP_i}^2 + \overline{BP_i} \times \overline{CP_i}$, $i = 1, 2, \dots, 9$.

求 $\sum_{i=1}^9 x_i = ?$

2. 設 n 為正整數, 又設拋物線 $y = 2^{2n+1}x^2 - 3 \cdot 2^n x + 1$ 與 x 軸交於 P_n ,

Q_n 兩點, 與 y 軸交於 R_n . 設 a_n 為 $\triangle P_n Q_n R_n$ 的面積, 試求

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ 的總和.

3. 已知 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$ 以及 $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$. 試求

(1) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = ?$

(2) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = ?$

4. (1) 描繪出函數 $y = -2 + \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$ 的圖形.

(2) 求定積分 $\int_{-1}^7 -2 + \sqrt{-x^2 + 6x + 7} dx$. (請試以高中理科數學所教定積分與面積關係解之)

5. 在電腦內資料的傳遞，例如，由中央處理器與記憶體之間資料的傳遞，有時傳遞路線會因外界干擾而產生錯誤的資料。電腦每條路線僅能傳送 0 與 1 兩種數值。因此，有時送出去的是 1，收到的卻是 0，或是送出去的是 0，收到的卻是 1。為了提昇正確資料的傳送，有人提出下列的方法：

“如果有 4 條資料線同時傳送，我們再增加一條檢驗線，共有 5 條線路。如果這 4 條資料線有奇數條傳出去的是 1，則讓檢驗線傳 1，否則傳 0。也就是說，這 5 條線傳出去的共有偶數個 1。”

此種方法的好處是，如果這 5 條線在傳送中僅有一條線產生錯誤資料時，系統就可立即辨識出共有奇數個 1，資料可重新再送一次，直到收到的有偶數個 1 為止。

為了方便計算，我們假設每條路線會產生誤差的機率為 $1/10$ ，同時路線之間彼此互不影響。試問，接收端收到的資料實際上是錯誤的，但仍被視為正確資料的機率為何？