

臺北市八十八學年度

高級中學數學及自然學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案卷內。

問題一、將 $1999!$ 寫成 $10^n \times a$ ，其中 a 與 n 都是正整數且 a 不是10的倍數。

(1) 試求 n 的值。(6分)

(2) 試求 a 的個位數字。(6分)

問題二、在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 3$ 。在 $\overline{AB}$ 上任選一點 D ，並作一長方形 $ADEF$ ，使得 F 在 $\overline{AC}$ 上，而且長方形 $ADEF$ 與 $\triangle ABC$ 的面積相等。若欲使長方形區域 $ADEF$ 與三角形區域 ABC 的重疊部分的面積為最大，則 $\overline{AD}$ 之長應為多少？(12分)

問題三、設 $\overline{AB}$ 是圓 O 的一弦， M 是 $\overline{AB}$ 上任意點。過 M 任作圓 O 的兩弦 $\overline{CD}$ 與 $\overline{EF}$ 。若 $\overline{CF}$ 、 $\overline{DE}$ 分別交 $\overline{AB}$ 於 G 、 H ，且 G 在 $\overline{AM}$ 上、 H 在 $\overline{BM}$ 上，試證：

$$\frac{1}{\overline{GM}} - \frac{1}{\overline{HM}} = \frac{1}{\overline{AM}} - \frac{1}{\overline{BM}}。 (12分)$$

問題四、連接一正三角形各邊的 n 等分點，可將它分割成 n^2 個全等的小正三角形，如下圖分別為 $n=3$ 及 $n=10$ 的情形。今想在圖中的某些交點上設置一種記號，使其中任兩個記號都不在圖中的同一直線上。試就(1) $n=3$ 及(2) $n=10$ 的情形分別討論最多可在幾個交點上設置記號？((1)為6分，(2)為7分。)

