# 八十八學年度高級中學數學能力競賽試題(二)(台南一中)

1.求聯立方程組$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=y \\ y+\dfrac{1}{y}=z \\ z+\dfrac{1}{z}=x \end{cases}$之實數解

2.已知一等比數列$\{a_n\}$,其中$a_1=\dfrac{1}{64}$,且$a_n>0, n=1,2,3,\cdots$

定義數列$\{a_n\}$的前$n$項的幾何平均值爲 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$，若此數列前 13 項的何平均值為 64，今從中去掉某一項，剩下的 12 項之幾何平均值變成 32，試問去掉的是第幾項？此數列的公比是多少？

3.(a)一個平方數$n^2(n\in N)$被 8 除的餘數可能有那幾種情況？若$n^2$被 5 除所得的餘數為何？

(b)1999 是不是能表示成兩個整數的平方和？如果是，請表示出來；如果不是，請予以說明。

4.試證明下列各式

(1)當$a>0, b>0$,則$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2$

(2)當$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$為 n 個正數時，用數學歸納法證明

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2$$

(3)設三角形的三邊長分別是$a, b, c$且$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，則

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\geq 6$$

5.已知△ABC 的三邊長是連續整數，若最大內角的度數是最小內角度數 2 倍，試求此三角形的三邊的長。

6.若$x, y$均為實數，試證：$\dfrac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)}\leq 1$