# 臺灣省第三區高級中學八十八學年度
# 數學科能力競賽口試題(一)(新竹高中)

1. 試求所有的正實數$a$，使得對所有的實數$x$，$a^{\cos 2x}+a^{2(\sin x)^2}\le 2$都成立。

## 參考解答：

1. $a^{\cos 2x}+a^{2(\sin x)^2}=a^{1-2(\sin x)^2}+a^{2(\sin x)^2}=\dfrac{a}{a^{2(\sin x)^2}}+a^{2(\sin x)^2}$

令$t=a^{2(\sin x)^2}$；因為$0\le(\sin x)^2\le 1$，所以$1\le t\le a^2$。因此我們要證明的不等式可以改寫為

$$\frac{a}{t}+t\le 2,\ \forall t\in[1,a^2]，$$

或等價的

$$t^2-2t+a\le 0,\ \forall t\in[1,a^2]。\tag{1}$$

考慮函數

$$f(t)=t^2-2t+a，$$

由(1)可知

$$f(1)=a-1\le 0 \ \text{且}\ f(a^2)=a^4-2a^2+a\le 0。$$

即

$$a\le 1\ \text{且}\ a^3-2a+1=(a-1)(a^2+a-1)\le 0。$$

$$a\le 1\ \text{且}\ a^2+a-1\ge 0。$$

因為$a^2+a-1\ge 0$的充要條件為$a\in(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}]$或$a\in[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\infty)$；故$a\in[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},1]$。