臺 灣 省 第 二 區 高 級 中 學 八十八 學 年 度
數學科能力競賽口試試題（板橋高中）

編號：________________

[問題一] 設 n 是一正奇數．試證：$n^8 - n^6 + n^4 - 3n^2 + 2$ 必為 256 的倍數．

[解答]

提示一：分解 $n^8-n^6+n^4-3n^2+2=(n^4+n^2+2)(n-1)^2(n+1)^2$.

提示二：證明：$n^4 \equiv n^2 \equiv 1 \pmod 4$

提示三：證明：$(n-1)(n+1)$ 為 $2\cdot 4=8$ 的倍數．

臺灣省第二區高級中學八十八學年度
數學科能力競賽口試試題（板橋高中）

編號：____________

[問題二] 設有$A(n)$種方式可在黑板上的一個$2\times n$單位方格表內,填入數字$1,2,3,\cdots,9$,使得每一格子與其上下左右相鄰的格子內之數字都不同.試求$A(1999)$之值.

[解答]：

提示一：先求$A(1)=\binom{9}{2}\cdot 2=9(9-1)=72.$

提示二：證明：$A(n)=57\cdot A(n-1).$

設前$n-1$行已填好數字,則第n行可分兩種情況填入數字:

(i) 右下方空格填入a,而填入右上方空格之方式有8種.

$\otimes$	a	
$\otimes$	b	a

(ii) 填入右下方c之方式(不填a和b)有7種,而填入右上方空格之方式有7種.

$\otimes$	a	
$\otimes$	b	c

由此可得,共有$8+7^2=57$種方式可填入第n行,故$A(n)=57A(n-1)$.因此,

$$A(n)=72\cdot 57^{n-1}.$$