八十八學年度高級中學數學能力競賽試題(二)參考解答(高雄中學)

1.參考解答

由$y=\dfrac{6}{x}$，$x=\dfrac{1}{2}$及$y=\dfrac{1}{2}$所圍成區域 R

R 中共有 14 個是其坐標為整數如下

(1,1) (2,1) (3,1) (4,1) (5,1) (6,1)	有 6 點
(1,2) (2,2) (3,2)	有 3 點
(1,3) (2,3)	有 2 點
(1,4)	有 1 點
(1,5)	有 1 點
(1,6)	有 1 點

共計 14 個點

2.參考解答

由 $f(x)=\begin{cases} x-10, x>100 \\ f(f(x+11)), x\le 100 \end{cases}$

得 f(101)=91，f(102)=92……，f(200)=190

$\rightarrow f(101)+\cdots\cdots+f(200)=(\dfrac{91+190}{2})\times\ 100=14050$

f(100)=f(f(111))=f(101)=91

f(99)=f(f(110))=f(100)=91

f(98)=f(f(109))=f(99)=91

f(97)=f(f(108))=f(98)=91

依此得

$f(96)=f(95)=\cdots\cdots=f(1)=91\rightarrow f(100)+\cdots\cdots+f(1)=100\times\ 91=9100$

故

$f(1)+\cdots+f(100)+f(101)+\cdots+f(200)=91\times\ 100+(\dfrac{91+130}{2})\times\ 100=23150$

3.參考解答

設 Z=整數所成之集合

$S=\{x^2+y^2+z^2+(z+1)^2|x,y,z\in Z\}$

證明：4 不能整除 S 中之任一數

(1)y，z 均為偶數

$4 \mid (y^2+z^2) \rightarrow 4 \nmid [x^2+(x+1)^2+y^2+z^2]$

(2)y,z 為一偶數奇數,不失一般性

設 $y=2k+1 \quad z=2n$

$y^2=4k^2+4k+1 \quad x^2+(x+1)+y^2+z^2$

$z^2=4y^2 \quad =2x(x+1)+4(k^2+k)+4n^2+2$

$4 \mid (y^2+z^2) \rightarrow 4 \nmid [x^2+(x+1)^2+y^2+z^2]$

(3)y，z 均為奇數

$y=2m+1 \quad z=2n+1$

$y^2+z^2=4(m^2+m+n^2+n)+2$

4.參考解答

已知 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(1)試証：$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$

(2)試証：$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$

(3)試証：$\cos\frac{\pi}{1999}+\cos\frac{3\pi}{1999}+\ldots\ldots+\cos\frac{1997\pi}{1999}=\frac{1}{2}$

(sol)：乘以 $\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{1999}}$，利用積化和差

5.參考解答

$\angle CPE = 180° - 10° - (180° - 40°) = 30°$

利用正弦定律，

在$\triangle$CPE 中，$\dfrac{\sin 10°}{\overline{CP}} = \dfrac{\sin 30°}{\overline{CE}}$

在$\triangle$CPF 中，$\dfrac{\sin 10°}{\overline{CP}} = \dfrac{\sin \angle CPF}{\overline{CF}}$

$\because \overline{CE} = \overline{CF}$

$\therefore \sin 30° = \sin \angle CPF \ \therefore \angle CPF = 150° \ \therefore \angle BCF = 180° - 10° - 150° = 20°$

6.參考解答

因 $z^2+w^2=(z+w)^2-2zw=7$

$z^3+w^3=(z+w)^3-3zw(2zw)=10$

令 $\alpha=z+w$，$\rho=zw$ $\therefore z^2+w^2=\alpha^2-2\rho=7 \rightarrow \rho=\dfrac{\alpha^2-7}{2}$

$z^3+w^3=\alpha^3-3\rho\alpha=10$

$\therefore 10=\alpha^3-3\alpha(\dfrac{\alpha^2-7}{2}) \rightarrow \alpha^3-21\alpha+20=0$

$\therefore (\alpha-1)(\alpha-4)(\alpha-5)=0$

$\therefore \alpha=4$ 為最大值