八十八學年度高級中學數學能力競賽試題(一)參考解答(高雄中學

1.參考解答

由 $(x-1),(y-1),(z-1)$ 皆大於 0

而有 $(\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2+\sqrt{z}^2)(\sqrt{\frac{x-1}{x}}^2+\sqrt{\frac{y-1}{y}}^2+\sqrt{\frac{z-1}{z}}^2)\geq(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+$
$\sqrt{3-1})^2$

即 $(x+y+z)(1-\frac{1}{x}+1-\frac{1}{y}+1-\frac{1}{z})\geq(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2$

化為 $(x+y+z)[3-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})]\geq(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2$

即証得 $\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$

2.參考解答

上面四個方程式可變成

$$\frac{a^3}{x-1^3}+\frac{b^3}{x-3^5}+\frac{c^3}{x-5^3}+\frac{d^7}{x-7^3}=1 \qquad (*)$$

其中 $x=2^3,4^3,6^3,8^3$，且式(*)對所有 x 除 $1^3,3^3,5^3,7^3$ 外均有意義，將(*)通分後化簡得

$$a^3(x-3^3)(x-5^3)(x-7^3)+b^3(x-1^3)(x-5^3)(x-7^3)+c^3(x-1^3)$$
$$(x-3^3)(x-7^3)+d^3(x-1^3)(x-3^3)(x-5^3)=(x-1^3)(x-3^3)(x-5^3)(x-7^3)$$

即

$$(x-1^3)(x-3^3)(x-5^3)(x-7^3)-a^3(x-3^3)(x-5^3)(x-7^3)-b^3(x-1^3)$$
$$(x-5^3)(x-7^3)-c^3(x-1^3)(x-3^3)(x-7^3)-d^3(x-1^3)(x-3^3)(x-5^3)=0$$

(**)　　上式為 x 的四次多項式

由題意知，$x=2^3,4^3,6^3,8^3$ 為其實根，且此多項式最多有四個根，

故方程式(**)的根恰好為 $2^3,4^3,6^3,8^3$

即式(**)等價於 $(x-2^3)(x-4^3)(x-6^3)(x-8^3)=0$　(***)

且式(**)及(***)中 x^4 的係數均為 1　　∴二式相等

因此，x^3 的係數為

$$a^3+b^3+c^3+d^3+1^3+3^3+5^3+7^3=2^3+4^3+8^3+6^3$$
$$\therefore a^3+b^3+c^3+d^3=2^3+4^3+8^3+6^3-1^3-2^3-5^3-7^3$$
$$=800-1-27-125-343=304$$ #

3.参考解答

因 $\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13}$，　　$\therefore\frac{15}{8}>\frac{n+k}{n}>\frac{13}{7}$　　$\therefore\frac{7}{8}>\frac{k}{n}>\frac{6}{7}$

同時乘以 $56n$，得 $48n<56k<49n$

亦即介於二數 $48n$ 及 $49n$ 之間恰只有一個 56 的倍數

因自 $48n$ 到 $49n$ 之間有 $n-1$ 個整數(即 $48n+1, 48n+2, \cdots, 48n+(n-1)$)
且恰含一個 56 的倍數 (若有二個 56 的倍數，即 $48n<56k_1<56k_2<49n$

$\therefore n-1\geq 56(k_2-k_1)\geq 2\cdot 56$)

若 $n-1\geq 2\cdot 56$，則至少有二個 56 倍數在 $48n$ 與 $49n$ 之間，

因此，當 $n=112$ 時為恰有一個 56 倍數的最大值

$\therefore 48\cdot 112=56\cdot 96<56\cdot 97<56\cdot 98=49\cdot 112$

$\therefore k=97$, 且 $n=112$ 為最大

4.參考解答

設半徑為 b 之圓轉角為 8 時之位置如右圖所示，
其圓心為 c'，將坐標軸平移至 c'，設 p 之原始
坐標為 (x, y)，新坐標為 (x', y') 且 $\overline{oc'}$ 與原坐標 x'
軸之夾角為 θ，則 oc' 與新坐標 x' 軸之夾角亦爲 θ 此時吾人發現 $a\theta=bt$

$\Rightarrow t=\frac{a}{b}\theta$

$\theta+\pi+t=\theta+\pi+\frac{a}{b}\theta=\pi+\left(1+\frac{a}{b}\right)\theta$

而 $op'=(b\cos\theta\,[\pi+(1+\frac{a}{b})\theta, b\sin\,[\pi+(1+\frac{a}{b})\theta\,])$

$=(-b\cos(1+\frac{a}{b})\theta, -b\sin(1+\frac{a}{b})\theta)$

又 $\because op=co'+o'p$

$\Rightarrow (x, y)=((a+b)\cos, (a+b)\sin\theta)+(-b\cos(1+\frac{a}{b})\theta\;, -b\sin(1+\frac{a}{b})\theta)$

$=((a+b)\cos-b\cos(1+\frac{a}{b})\theta\;, (a+b)\sin\theta-b\sin(1+\frac{a}{b})\theta)$

故 p 點之軌跡方程式之參數式為

$$\begin{cases} x(\theta)=(a+b)\cos\theta-b\cos(1+\frac{a}{b})\theta \\ y(\theta)=(a+b)\sin\theta-b\sin(1+\frac{a}{b})\theta \end{cases}\qquad \theta\in R$$