88校　嘉義區競試一解答

一、考慮在$x+y=n$上的格子點

$n=5k$時，個數$=1+6+11+\cdots(1+n)+\cdots+11+6+1=5k^2+2k+1$

$n=5k-1$時，個數$=1+6+11+\cdots(1+n-2)+\cdots+9+4=5k^2$

$n=5k-2$時，個數$=1+6+11+\cdots(1+n-4)+\cdots+7+2=5k^2-2k$

$n=5k-3$時，個數$=1+6+11+\cdots(1+n-6)+\cdots+5+0=5k^2-4k$

$n=5k-4$時，個數$=1+6+11+\cdots(1+n-8)+\cdots+3=5k^2-6k+2$

故

$n=5k$時，個數$=\dfrac{n^2+2n+5}{5}$

$n=5k-1$時，個數$=\dfrac{n^2+2n+1}{5}$

$n=5k-2$時，個數$=\dfrac{n^2+2n}{5}$

$n=5k-3$時，個數$=\dfrac{n^2+2n-3}{5}$

$n=5k-4$時，個數$=\dfrac{n^2+2n+2}{5}$

二、m之最大值為4（由四色定理即可得證或逐步討論之）

三、$\dfrac{m}{n}=\sum_{k=1}^{p-1}\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{p-k}\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{1}^{1}\frac{p}{k(p-k)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{pM}{(p-1)!}\quad \text{for some} M$$

因此若$p\neq 2$，則$p|m$

四、(1) 考慮一個多項式

$$p_j(x)=\sum_{i=0}^{6}L_i(x)a_i^j \quad 對於\ j=1,2,\cdots,6$$

則 $p_j(a_k)=\sum_{i=0}^{6}L_i(a_k)a_i^j=a_k^j \quad \forall \quad k=0,1,2,\cdots 6$

設 $q(x)=p_j(x)=x^j$ 則 $q(a_k)=p_j(a_k)-a_k^j=0 \quad \forall \quad k=0,1,2,\cdots 6$

因為$q(x)$ 為一個多項式次數≤ 6且$q(x)$有7不同的根，

所以$q(x)\equiv 0$，因此$p_j(x)=x^j$且$p_j(0)=\sum_{i=0}^{6}L_i(0)a_i^j=\sum_{i=0}^{6}c_ia_i^j=0$

(2) 令$h(x)=x^7-(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_6)$則$h(x)$為一個多項式次數$\le 6$

且$h(a_k)=a_k^7$，$k=0,1,2,\cdots,6$，設$r(x):=h(x)-\sum_{i=0}^{6}L_i(x)a_i^7$，

則$r(a_k)=h(a_k)-\sum_{i=0}^{6}L_i(a_k)a_k^7=a_k^7-a_k^7=0$，$k=0,1,2,\cdots,6$

因為$r(x)$為一個多項式次數≤ 6且$r(x)$有7不同的根，所$r(x)\equiv 0$

即$h(x)=\sum_{i=0}^{b}L_i(x)a_k^7$，所以$h(0)=x_0x_1\cdots x_n=\sum_{i=0}^{6}L_i(0)a_i^7$