八十八學年度高級中學數學能力競賽試題(一)參考解答(屏東高中)

1.參考解答

(a)設 $3^k \le 2n+1 < 3^{k+1}, k \in N$ 則

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{3^k}+\sum_{\substack{i=0\\1+2i\ne 3^K}}^{n}\frac{1}{1+2i}=\frac{1}{3^k}+\frac{s}{3^{k-1}r} \qquad 其中 3 \nmid r$$

$$=\frac{r+3s}{3^k r}$$

$\because 3 \nmid r+3s$，$\frac{r+3s}{3^k r}$ 不為整數

(b)對每一 $\ell \in N$，$3 \mid 4^l-1$，$\therefore$存在一 $m \in N$ s.t

$3m=4^l-1$ or $3m+1=4^l$

又 $3 \nmid 2\cdot 4^l-1$ 且 $3 \nmid 3\cdot 4^l-1$

$\therefore$不存在 $q \in N$ s.t. $1+3q=2\cdot 4^l$ or $1+3q=3\cdot 4^l$

設 $4^k \le 1+3n < 4^{k+1}, k \in N$

則 $$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\ldots\ldots+\frac{1}{1+3n}=\frac{1}{4^k}+\frac{s}{4^{k-1}r} \qquad 其中 4 \nmid r$$

$$=\frac{r+4s}{4^k r}$$

$\because 4 \nmid r+4s$ $\therefore \frac{r+4s}{4^k r}$ 不為整數

$$\begin{array}{l} 1 + 0 - 21 + 20 \;\lfloor -5 \\ \quad -5 + 25 \\ \hline 1 - 5 + 4 \end{array}$$

2.參考解答

$n+\sqrt{n^2-1}$ 是方程式 $x+\frac{1}{x}=2n$ 的根

令 $x^m+\frac{1}{x^m}=2a_m$—(∗)

則 $2a_m=2a_m(x+\frac{1}{x})-2a_{m-1}$

$=4n\cdot a_m-2a_{m-1}$

即 $a_{m+1}=2n\cdot a_m-a_{m-1}$

故 a_m 是一個整數，令 $a_m=z$，z 是正整數

因此(由(∗))，$x^m=a_m+\sqrt{a_m^2-1}$

$=z+\sqrt{z^2-1}$

3.參考解答

過P，作$\overline{DP}//\overline{AB}$交$\overline{AC}$於E點，且作$\overline{AD}//\overline{BC}$

連接$\overline{AP}$，在$\overline{AP}$取一點F，使得$\overline{EF}//\overline{AD}$

則$\overline{AD}=\overline{PB}$

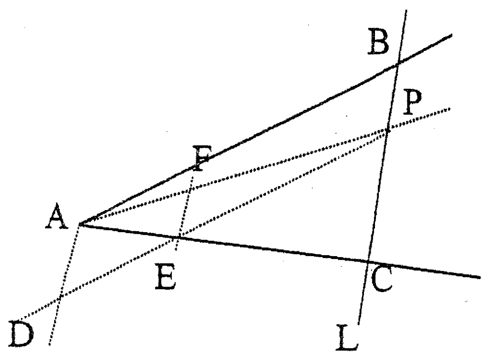
且$\frac{1}{\overline{EF}}=\frac{1}{\overline{AD}}\neq\frac{1}{\overline{PC}}$

即$\frac{1}{\overline{EF}}=\frac{1}{\overline{PB}}\neq\frac{1}{\overline{PC}}$

欲使$\frac{1}{\overline{PB}}\neq\frac{1}{\overline{PC}}$最大，即是使得$\overline{EF}$最小

因此若取$\overline{EF}\perp\overline{AP}$，則$\overline{EF}$最小，

即直線L須與$\overline{EF}$平行且$\overline{EF}\perp\overline{AP}$時，$\frac{1}{\overline{PB}}+\frac{1}{\overline{PC}}$之值最小



4.參考解答

$\because x>0$ d $m>1\rightarrow(1+x)^m>1+mx$

$\therefore(1+\frac{n}{m})^m>1+n$　故$\sqrt[m]{1+n}<1+\frac{n}{m}$

同理，$\sqrt[n]{1+m}<1+\frac{n}{n}$

$\because\frac{1}{\sqrt[n]{1+m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{1+n}}>\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}=1$