八十七學年度高級中學數學科能力競賽
筆試試題參考解答

臺灣省第四區(台中)試題(一)參考解答:

[問題一] 令

$$\frac{kp}{q} = \left[\frac{kp}{q}\right] + r_k \quad (1 \le k \le q-1).$$

因p, q互質且$1 \le k \le q-1$, 故$\frac{kp}{q}$不可能是整數. 因此, $0 < r_k < 1$. 今

$$r_k + r_{q-k} = \frac{kp}{q} - \left[\frac{kp}{q}\right] + (q-k)\frac{p}{q} - \left[(q-k)\frac{p}{q}\right] = p - \left[\frac{kp}{q}\right] - \left[(q-k)\frac{p}{q}\right].$$

又$0 < r_k + r_{q-k} < 2$, 且為整數, 故$r_k + r_{q-k} = 1$. 代入上式得

$$1 = p - \left[\frac{kp}{q}\right] - \left[(q-k)\frac{p}{q}\right],$$

即

$$\left[\frac{kp}{q}\right] + \left[(q-k)\frac{p}{q}\right] = p - 1,$$

其中$1 \le k \le q-1$, 所以

$$2\sum_{k=1}^{q-1}\left[\frac{kp}{q}\right] = (q-1)(p-1).$$

故

$$\sum_{k=1}^{q-1}\left[\frac{kp}{q}\right] = \frac{1}{2}(q-1)(p-1).$$

[問題二] 以D為原點, BC, AD分別為X, Y軸. 設A, H, B, C的坐標分別為$(0,a)$, $(0,h)$, $(b,0)$, $(c,0)$, 則直線BH的方程式為$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1$, 而$AC$的方程式為$\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1$. 相減得

$$x\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + y\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{a}\right) = 0. \qquad (1)$$

方程式(1)為直線, 且通過BH與AC的交點, 以及原點D. 所以, (1)就是直線DE. 同理, DF的方程式為

$$x(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})+y(\frac{1}{h}-\frac{1}{a})=0. \tag{2}$$

因為直線(1)與直線(2)的斜率互為相反數,故得直線AD平分$\angle EDF$.

[問題三] (i) 假設x,y,z被3除的餘數均相異,為方便計,可設$x=3m, y=3n+1, z=3k+2$ $(m,n,k\in Z)$,則$3\nmid(x-y)(y-z)(z-x)$. 即$3\nmid x+y+z$. 但$x+y+z=3(m+n+k)+3$. 故$3|x+y+z$,與(3)矛盾! 故得證.

(ii) 若x,y,z至少有二數被3除的餘數相同,則$3|(x-y)(y-z)(z-x)$. 於是,$3|x+y+z$. 由此可得x,y,z被3除的餘數都相同. 因此,$27=3^3|(x-y)(y-z)(z-x)$.

[問題四] 顯然,條件

$1|a_1, 2|a_1a_2=10a_1+a_2 \Longleftrightarrow a_2$為偶數;

$3|a_1a_2a_3 \Longleftrightarrow 3|a_1+a_2+a_3$;

$4|a_1a_2a_3a_4 \Longleftrightarrow 4|a_3a_4 \Longleftrightarrow 4|2a_3+a_4$;

$5|a_1a_2\cdots a_5 \Longleftrightarrow a_5=0,5$;

$6|a_1a_2\cdots a_6 \Leftrightarrow 3|a_1+a_2+\cdots+a_6, 2|a_6 \Leftrightarrow 3|a_4+a_5+a_6, 2|a_6$ (因$3|a_1+a_2+a_3$).

故(a_1,a_2)共有$9\cdot5=45$種組合方式,即$10,12,14,16,18,\cdots$. 但$10\equiv1 \pmod 3$, $12\equiv0 \pmod 3$, $14\equiv2 \pmod 3$, $16\equiv1 \pmod 3$, $18\equiv0 \pmod 3$, $\cdots$ 且$a_1+a_2\equiv-a_3 \pmod 3$. 故給定$a_3$時,$(a_1,a_2)$共有15種不同的情形. 又因$4|2a_3+a_4$,即$2|a_3+\frac{a_4}{2}$,故$a_3$與$\frac{a_4}{2}$同為奇數或同為偶數. 故給定$a_4$時,$a_3$只有5種可能. 因此,給定$a_3$時,$(a_1,a_2,a_3)$之取法數為$5\cdot15=75$. 又$(a_4,a_5,a_6)$之組合如下表

<table>
<tr><td>a_4</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td>a_5</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>5</td></tr>
<tr><td>a_6</td><td>0.6</td><td>4</td><td>4</td><td>2.8</td><td>2.8</td><td>0.6</td><td>0.6</td><td>4</td><td>4</td><td>2.8</td></tr>
</table>

共16組.

故$a_1a_2\cdots a_6$滿足給定條件之總數為$5\cdot15\cdot16=1200$.