臺灣省第四區高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(一)(台中一中)

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿

注意事項:

1. 本試卷共四題計算證明題,滿分 49 分.
2. 考試時間: 2 小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

一. 設p和q為互質之正整數,求

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{p}\right],$$

其中$[x]$表示不超過x的最大整數.

二. 在$\triangle ABC$中,設$AB \perp BC$於D, H為AD上任意點,直線BH交邊AC於E,直線CH交邊AB於F.求證AD平分$\angle EDF$.

三. 設整數x, y, z滿足$(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$.證明：

(1) x, y, z中至少有兩個被3除所得的餘數相同.

(2) $x+y+z$可被27整除.

四. 有一個六位正整數$A=a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, $a_1, a_2, \cdots, a_6 \in \{0, 1, \cdots, 9\}$,且$a_1 \neq 0$.已知對於$n=1, 2, \cdots, 6$, $n|a_1a_2\cdots a_n$,請問這樣的六位數有幾個？