八十七 學 年 度 高 級 中 學 數 學 科 能 力 競 賽
筆試試題參考解答

台北市試題(二)參考解答:

[問題1] 令$n=1$,得

$$a_1^2=\frac{1}{2}a_1a_2 \implies a_2=2a_1=\frac{2}{3}.$$

令$n=2$,得

$$a_1a_2+a_2a_1=\frac{1}{2}(a_1a_2+a_2a_3) \implies a_3=3a_1=\frac{3}{3}=1.$$

再由數學歸納法可證得:對每個$n\in N$,恆有$a_n=\frac{n}{3}$.

[問題2] 設方程式的根爲x_1與x_2,則依根與係數的關係,得$x_1+x_2=-a$與$x_1x_2=b$.於是,可得

$$1998=a+b=x_1x_2-x_1-x_2=(x_1-1)(x_2-1)-1,$$

或

$$(x_1-1)(x_2-1)=1999.$$

因爲1999是質數,而且x_1與x_2是整數,所以,x_1-1與x_2-1兩數中一爲1、另一爲1999;或是一爲-1、另一爲-1999.因此,兩根爲2與2000,或兩根爲0與-1998.由此可知$(a,b)=(-2002,4000)$或$(1998,0)$.

[問題3] 所欲計數的等腰三角形的形狀共有十五種,分別計數如下:

(1) 腰長爲1而底長爲$\sqrt{2}$.對每個$k=1,2,\cdots,29$,有4個此種等腰三角形,其頂點坐標分別如下:

$$\begin{aligned}&(k,0)、(k+1,0)、(k,1),\\&(k,0)、(k+1,0)、(k+1,1),\\&(k,1)、(k+1,1)、(k,0),\\&(k,1)、(k+1,1)、(k+1,0).\end{aligned}$$

因此,此種等腰三角形共116個.

(2) 底長爲偶數而高爲1.顯然地,此種等腰三角形的底長至少爲2、至多爲28.對每個$l=1,2,\cdots,14$,底長爲$2l$的此種等腰三角形可計數如下:對每個$k=1,2,\cdots,30-2l$,有2個此種等腰三角形,其頂點坐標分別如下:

因為$a \le k_i \le b, \forall i = 1,2,3,\cdots,m$, 我們可得

$$m \cdot \binom{a}{2} \le n \cdot \binom{k}{2} \le m \cdot \binom{b}{2}.$$

即

$$\frac{m(a^2-a)}{n} \le (k-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \le \frac{m(b^2-b)}{n}.$$

上式等價於

$$\sqrt{\frac{4m(a^2-a)+n}{4n}} \le k - \frac{1}{2} \le \sqrt{\frac{4m(b^2-b)+n}{4n}}.$$

取高斯函數值,可得

$$\left[\sqrt{\frac{4m(a^2-a)+n}{4n}}\right] \le \left[k-\frac{1}{2}\right] = k-1 \le \left[\sqrt{\frac{4m(b^2-b)+n}{4n}}\right].$$

另證:作一個m列、$k(k-1)/2$行的矩陣如下:第i列代表第i種社團活動、每一行代表一對學生;在代表學生甲與學生乙的那一行中,若學生甲與學生乙兩人都參加第i種社團活動,則此行的第i個元素為1;否則,此行的第i個元素為0.依假設每一對學生所參加的社團活動中都恰有n種是相同的,這表示此矩陣的每一行都恰有n個元素為1、$m-n$個元素為0.因此,此矩陣的所有元素中,1的數目可表示成$n \cdot k(k-1)/2$.另一方面,設參加第i種社團活動的學生共有k_i位,$i=1,2,\cdots,m$,則這k_i位學生可配成$k_i(k_i-1)/2$對.在這$k_i(k_i-1)/2$對學生所對應的$k_i(k_i-1)/2$行中,第i個元素都是1;其餘的$k(k-1)/2-k_i(k_i)/2$行中,第i個元素都是0.這表示此矩陣的第i列恰有$k_i(k_i-1)/2$個元素為1.因此,此矩陣的所有元素中,1的數目可表示成$\sum_{i=1}^{m} k_i(k_i-1)/2$.由此可知:

$$\frac{k_1(k_1-1)}{2} + \frac{k_2(k_2-1)}{2} + \cdots + \frac{k_m(k_m-1)}{2} = n \cdot \frac{k(k-1)}{2}.$$

因為對每個$i=1,2,\cdots,m$,恆有$a \le k_i \le b$,所以,可得

$$m \cdot \frac{a(a-1)}{2} \le n \cdot \frac{k(k-1)}{2} \le m \cdot \frac{b(b-1)}{2},$$

即

$$\frac{m(a^2-a)}{n} \le (k-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \le \frac{m(b^2-b)}{n}.$$

於是,

$$\frac{4m(a^2-a)+n}{4n} \le (k-\frac{1}{2})^2 \le \frac{4m(b^2-b)+n}{4n},$$

得

$$\sqrt{\frac{4m(a^2-a)+n}{4n}} \le k - \frac{1}{2} \le \sqrt{\frac{4m(b^2-b)+n}{4n}}.$$

在上述最後的不等式中取最大整數函數值,即得

$$(k,0)、(k+2l,0)、(k+l,1),$$
$$(k,1)、(k+2l,1)、(k+l,0).$$

因此,對每個$l=1,2,\cdots,14$,底長為$2l$的此種等腰三角形共$60-4l$個.由此可知:底長為偶數而高為1的此種等腰三角形的總數為

$$\sum_{l=1}^{14}(60-4l)=\frac{14\cdot(56+4)}{2}=420.$$

上述兩類合計共有536個.

[問題4]

$$\begin{aligned}
& \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ \\
= & (\sin 10^\circ \sin 80^\circ)(\sin 20^\circ \sin 70^\circ)(\sin 30^\circ \sin 60^\circ)(\sin 40^\circ \sin 50^\circ) \\
= & \tfrac{1}{2}(\cos 70^\circ - 0)\cdot\tfrac{1}{2}(\cos 50^\circ - 0)\cdot\tfrac{1}{2}(\cos 30^\circ - 0)\cdot\tfrac{1}{2}(\cos 10^\circ - 0) \\
= & \tfrac{1}{16}(\cos 10^\circ \cos 70^\circ)(\cos 30^\circ \cos 50^\circ) \\
= & \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 80^\circ)\cdot\tfrac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 80^\circ) \\
= & \tfrac{1}{64}(\cos 60^\circ \cos 20^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ + \cos 60^\circ \cos 80^\circ + \cos^2 80^\circ) \\
= & \tfrac{1}{64}[\tfrac{1}{2}(\cos 40^\circ + \cos 80^\circ) + \tfrac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 100^\circ) + \tfrac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 140^\circ) + \tfrac{1}{2}(1+\cos 160^\circ)] \\
= & \tfrac{1}{128}(\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \tfrac{1}{2} - \cos 80^\circ + \cos 20^\circ - \cos 40^\circ + 1 - \cos 20^\circ) \\
= & \tfrac{3}{256}.
\end{aligned}$$

另解:

$$\begin{aligned}
& \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ \\
= & \tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}(\sin 10^\circ \cos 10^\circ)(\sin 20^\circ \cos 20^\circ)(\sin 40^\circ \cos 40^\circ \\
= & \tfrac{\sqrt{3}}{32}\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ \\
= & \tfrac{\sqrt{3}}{64}\sin 40^\circ(\cos 60^\circ - \cos 100^\circ) \\
= & \tfrac{\sqrt{3}}{64}\sin 40^\circ(\tfrac{1}{2} + \cos 80^\circ) \\
= & \tfrac{\sqrt{3}}{64}\sin 40^\circ(\tfrac{1}{2} + 1 - 2\sin^2 40^\circ) \\
= & \tfrac{\sqrt{3}}{128}(3\sin 40^\circ - 4\sin^3 40^\circ) \\
= & \tfrac{\sqrt{3}}{128}\sin 120^\circ \\
= & \tfrac{3}{128}.
\end{aligned}$$

[問題5] 設點P的坐標為$P(x,0,0)$,則

$$\overline{PA}+\overline{PB}=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{(x-2)^2+9}.$$

將上式右端表成$f(x)$,則得

$$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}+\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+9}}.$$

令$f'(x)=0,1<x<2$,即得

$$(x-1)^2[(x-2)^2+9]=(x-2)^2[(x-1)+4],$$

整理可得

$$9(x-1)^2=4(x-2)^2.$$

於是，$3(x-1)=\pm 2(x-2)$，故 $x=-1$ 或 $x=\frac{7}{5}$. 因爲 $1<x<2$，所以，$x=\frac{7}{5}$.

另解：因爲過點 $B(2,3,0)$ 在 xy 平面上，所以，我們可在 xy 平面上選取一點 A_1，使得對於 x 軸上每個點 Q，恆有 $\overline{AQ}=\overline{A_1Q}$. 顯然地，該點可選爲 $A_1(1,2,0)$. 在 xy 平面上，點 $B(2,3,0$ 對 x 軸的對稱點爲點 $B'(2,-3,0)$. 因爲直線 A_1B' 的方程式爲 $5x+y=7$、$z=0$，所以，直線 A_1B' 與 x 軸的交點爲 $(\frac{7}{5},0,0)$. 這就是題目中使得 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 爲最小的點 P，其 x 坐標爲 $\frac{7}{5}$.