八十七學年度高級中學數學科能力競賽
筆試試題參考解答

台北市試題(一)參考解答：

[問題1]若$2+2\sqrt{28n^2+1}$是正整數，則$\sqrt{28n^2+1}$是有理數．於是，$\sqrt{28n^2+1}$是正整數，而且顯然是奇數．令$\sqrt{28n^2+1}=2m+1$，其中的m爲正整數．由此可得

$$7n^2=m(n+1).$$

因爲7是質數，所以，m與$n+1$兩數中有一個是7的倍數．

(1) 若m是7的倍數，則因爲$\frac{m}{7}$與$m+1$兩數互質，所以，必有二正整數a與b使得$m=7a^2$且$m+1=7d^2$（例如：當$n=24$時，$a=3$、$b=8$）．於是，得

$$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2(2m+1)=(m+1)=(2b)^2.$$

(2) 若$m+1$是7的倍數，則因爲m與$\frac{m+1}{7}$兩數互質，所以，必有二正整數c與d使得$m=c^2$且$m+1=7d^2$．由此可知c^2+1是7的倍數，但這是不可能的，因爲

$$(7k)^2+1=7(7k^2)+1,\ (7k\pm 1)^2+1=7(7k^2\pm 2k)+2,$$

$$(7k\pm 2)^2+1=7(7k^2\pm 4k)+5,\ (7k\pm 3)^2+1=7(7k^2\pm 6k+1)+3.$$

[問題2]不論點P在外接圓的那一段弧上，都可得

$$\frac{\overline{AF}\cdot\overline{BE}}{\overline{AB}\cdot\overline{EF}}=\frac{(S_{\triangle PAF})\cdot(S_{\triangle PBE})}{(S_{\triangle PAB})\cdot(S_{\triangle PEF})}=\frac{(\overline{PA}\cdot\overline{PF}\sin\angle APF)(\overline{PB}\cdot\overline{PE}\sin\angle BPE)}{(\overline{PA}\cdot\overline{PB}\sin\angle APB)(\overline{PE}\cdot\overline{PF}\sin\angle EPF)}$$

$$=\frac{\sin(\widehat{AD})/2\times\sin(\widehat{BC}\ /2)}{\sin(\widehat{AB})/2\cdot\sin(\widehat{CD}\ /2)}.$$

因爲上式左端的$\overline{AB}$與右端的比值都是與點P無關的定值，所以，可知比值$\frac{\overline{AF}\cdot\overline{BE}}{\overline{EF}}$爲定值．

[問題3]設第i種社團活動有k_i位學生參加，$\forall i=1,2,3,\cdots,m$，則

$$\binom{k_1}{2}+\binom{k_2}{2}+\cdots+\binom{k_m}{2}=n\cdot\binom{k}{2}.$$

$$\left[\sqrt{\frac{4m(a^2-a)+n}{4n}}\ \right]\le k-1\le\left[\sqrt{\frac{4m(b^2-b)+n}{4n}}\ \right],$$

故

$$\left[\sqrt{\frac{4m(a^2-a)+n}{4n}}\ \right]+1\le k\le\left[\sqrt{\frac{4m(b^2-b)+n}{4n}}\ \right]+1.$$