

台北市高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(一) (建國中學)

編號: _____

注意事項:

1. 本試卷共三題計算證明題, 滿分 49 分, 第一題 16 分, 第二題 16 分, 第三題 17 分.
2. 考試時間: 2 小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

一. 設 n 為正整數. 若 $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ 是一個正整數, 則 $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ 必是一個完全平方數, 試證之.

二. 給定一個圓內接四邊形 $ABCD$. 對於四邊形 $ABCD$ 的外接圓上異於 A, B, C 與 D 的任意點 P , 設直線 PC 與直線 AB 交於 E , 直線 PD 與直線 AB 交於 F . 試證:

$$\frac{\overline{AF} \cdot \overline{BE}}{\overline{EF}}$$

為定值 (即與 P 的位置無關).

三. 設有 k 位學生參加 m 種不同的社團活動, 每一種社團活動至少有 a 位, 至多有 b 位學生參加, 其中 $1 \leq a \leq b \leq k$. 已知每兩位學生所參加的社團活動中都恰有 n 種相同, 其中 $n \geq 1$. 試證:

$$\left\lceil \sqrt{\frac{4m(a^2 - a) + n}{4n}} \right\rceil + 1 \leq k \leq \left\lceil \sqrt{\frac{4m(b^2 - b) + n}{4n}} \right\rceil + 1,$$

其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數.