八十七 學 年 度 高 級 中 學 數 學 科 能 力 競 賽
筆試試題參考解答

臺灣省第七區(高屏)試題(一)參考解答:

[問題一]因為

$$\log_{10}(B+5m-n-2)=\log_{10}A=m+\log_{10}n,$$

故

$$\frac{B+5m-n-2}{n}=10^m.$$

於是,可得

$$B=n\cdot 10^m-5m+n+2.$$

因B為一四位數,故可得$m=3$且$B=1001n-13$.再由B的千位數與百位數之和等於$(n-1)+9=7n-4$,解得$n=2$.於是,$B=1989$,而$A=2000$.

[問題二]代入直角坐標系,令直徑為6公分的圓之圓心$O(0,0)$,而插入的大圓圓心$A(-1,0)$,小圓圓心$B(2,0)$.設$C(a,b)$為一半徑r的標準圓圓心,則

$$(a+1)^2+b^2=\overline{AC}^2=(2+r)^2, \tag{1}$$

$$(a-2)^2+b^2=\overline{BC}^2=(1+r)^2, \tag{2}$$

$$a^2+b^2=\overline{OC}^2=(3-r)^2. \tag{3}$$

由(1)式$-$(3)式可得

$$2a+1=10r-5. \tag{4}$$

由(2)式$-$(3)式可得

$$-4a+4=8r-8. \tag{5}$$

由(4)及(5)可導出$r=\frac{6}{7}$,而圓心C的坐標$(a,b)=(\frac{9}{7},\pm\frac{12}{7})$.故所求的兩個標準圓柱直徑的大小為$2r=\frac{12}{7}$.

[問題三] (1) 6的正因數為$1,2,3,6$,而其正因數的個數分別為$1,2,2,4$.得

$$(1+2+2+4)^2=81=1^3+2^3+2^3+4^3.$$

故6具有問題所述的性質.

(2)對一般的正整數n也都具有問題所述的性質.令$S(n)$表示n的所有正因數的正因數之個數和的平方,而$T(n)$表示n的所有正因數的正因數之個數立

方和，欲證 $S(n)=T(n)$，我們只須證明：對任意的質數 p,q 都有 $S(p)=T(p)$ 且 $S(pq)=S(p)S(q)=T(p)T(q)=T(pq)$. 顯然，由下列的結果可得證:

$$S(p)=(1+2)^2=9=1^3+2^3=T(p),$$

$$S(p^2)=(1+2+3)^2=36=2^3+2^3+3^3=T(p^2),$$

且

$$S(pq)=(1+2+2+4)^2=81=S(p)S(q)=1^3+2^3+2^3+4^3=T(pq),\ \forall\ p\neq q.$$

[問題四] 令 $p=\frac{a}{c}, q=\frac{b}{c}$，得 $0<p,q<1$ 且

$$p^n+q^n=1,\ 其中\ n\geq 3.$$

如此，原問題相當於證明以 $p,q,1$ 爲三邊的三角形 ABC 必爲銳角三角形. 因爲

$$1^2=1=p^n+q^n<p^2+q^2,$$

故 ΔABC 的最大內角 $\angle C$ 之餘弦

$$\cos C=\frac{p^2+q^2-1^2}{2pq}>0.$$

因此，$\angle C$ 是一銳角，故得證.