86年度台中區複賽 競試（一）參考解答

1. (a)令$P(a,a^2)$為拋物線的一點，

則通過點P且斜率為m的直線W之方程式為

$$W: y=a^2+m(x-a)$$

與W平行的直線W'之方程式可設為

$$W': y=a^2+m(x-a)+c,(c\neq 0)$$

則介於W與W'之間且平行W的直線為

$$W_k: y=a^2+m(x-a)+k$$

其中k介於$0,c$之間，

考慮W_k和Γ的相交情形：

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=a^2+m(x-a)+k \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2-mx+(ma-a^2-k)=0$

判別式$=m^2-4(ma-a^2-k)$

$=(m-2a)^2+4k$

由此可知，若$m-2a=0$，則存在k介於$0,c$之間，使得判別式>0，所以W_k和Γ的相交。

若$m-2a=0$，則取$c=-1$，如此一來，所有k介於0和c之間都使得判別式<0，也就說W_k和Γ不相交。

因此，過P的切線L之方程式

$$L: y=2a(x-a)+a^2$$

(b)過$Q(c,d)$之切線方程式為

$$M: y=2c(x-c)+c^2$$

則 $N_1: y=\dfrac{-1}{2a}(x-a)+a^2$

$N_2: y=\dfrac{-1}{2c}(x-c)+c^2$

$\Rightarrow N_1$和N_2之交點作標為$(-2ac(a+c), a^2+ac+c^2+\dfrac{1}{2})$

其中Y坐標$=a^2+ac+c^2+\dfrac{1}{2}$

$$=(a+\frac{c}{2})^2+\frac{3}{4}c^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

2.（*解法一*）使用歸納法

$n=1 \qquad a_3=\dfrac{a_2^2+3}{a_1}=\dfrac{1+3}{1}=4$

$a_3+a_1=5a_2$ 成立

設 $n=k$ 成立：$a_{k+2}+a_k=5a_{k+1}$

$$\text{則 } a_{k+3}+a_{k+1}=\frac{a_{k+2}^2+3}{a_{k+1}}+a_{k+1}=\frac{a_{k+2}^2+a_{k+1}^2+3}{a_{k+1}}$$

$$=\frac{a_{k+2}^2+a_{k+2}a_k}{a_{k+1}}=\frac{a_{k+2}(a_{k+2}+a_k)}{a_{k+1}}$$

$$=\frac{a_{k+2}\cdot 5a_{k+1}}{a_{k+1}}=5a_{k+2}$$

（*解法二*）

$$\because a_{n+2}a_n=a_{n+1}^2+3$$

$$a_{n+3}a_{n+1}=a_{n+2}^2+3$$

$$\therefore a_{n+2}a_n-a_{n+3}a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_{n+2}^2$$

$$\Rightarrow a_{n+2}(a_n+a_{n+2})=a_{n+1}(a_{n+1}+a_{n+3})$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}+a_{n+3}}=\frac{a_{n+1}}{a_n+a_{n+2}}$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{a_2}{a_1+a_3}=\frac{1}{5}$$

$$a_{n+3}+a_{n+1}=5a_{n+2}$$

$$\text{即 } a_{n+2}+a_n=5a_{n+1}$$

3. (a)利用 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

及 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$$\text{可得 } \cos\frac{3\pi}{7}=4\cos^3\frac{\pi}{7}-3\cos\frac{\pi}{7}$$

$$\text{及 } \cos\frac{4\pi}{7}=2\cos^2\frac{2\pi}{7}-1$$

$$=2(2\cos^2\frac{\pi}{7}-1)^2-1$$

$$=8\cos^4\frac{\pi}{7}-8\cos^2\frac{\pi}{7}+1$$

而且，$\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}=0$

所以，

$$4\cos^3\frac{\pi}{7}-3\cos\frac{\pi}{7}+8\cos^4\frac{\pi}{7}-8\cos^2\frac{\pi}{7}+1=0$$

令 $x=\cos\frac{\pi}{7}$，則

$$8x^4+4x^3-8x^2-3x+1=0$$

但 $8x^4+4x^3-8x^2-3x+1=(x+1)(8x^3-4x^2-4x+1)=0$

且 $x+1=\cos\frac{\pi}{7}+1\neq 0$

$\therefore 8x^3-4x^2-4x+1=0$ 得證

(b)令 $x=\cos\frac{\pi}{7}$

則 $\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{1-\cos\frac{6\pi}{7}}{2}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{7}}{2}=\frac{1+x}{2}$

$\sin^2\frac{\pi}{7}=1-\cos^2\frac{\pi}{7}=1-x^2$

$\sin^2\frac{2\pi}{7}=\frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2}=\frac{1+\cos\frac{3\pi}{7}}{2}=\frac{1+4x^3-3x}{2}$

$\sin\frac{2\pi}{7}=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}=2x\sin\frac{\pi}{7}$

$\sin\frac{3\pi}{7}=3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}=(4x^2-1)\sin\frac{\pi}{7}$

所以，原命題可改成證明

$$\frac{\frac{1+x}{2}}{2x}+\frac{1-x^2}{4x^2-1}=\frac{\frac{4x^3-3x+1}{2}}{1}$$

也就是，證明 $32x^6-32x^4+8x^3+2x^2-5x+1=0$ 即可

然而 $8x^3-4x^2-4x+1$ 為此多項式之因式，故由(a)得證

4. (a)設 n 為任一偶自然數

則 $n=2^m\cdot k$，k 為奇數

由假設 $k=\sum_{i=1}^{t}2^{a_i}\cdot 3^{b_i}$，其中 $a_1>a_2>\cdots a_t$ 及 $b_1<\cdots<b_t$

所以

$$n=\sum_{i=1}^{t}2^{m+a_i}\cdot 3^{b_i}$$ ，其中$m+a_1>\cdots>m+a_t$及$b_1<\cdots<b_t$

∴偶自然數滿足猜測

(b)由(a)知，僅須證明所有奇數滿足猜測，

令n為奇數，$n=2m+1$

$m=0$ 顯然成立。

設$m=k$成立

$m=k+1$：將n寫成$n=3^{\ell}+t$，其中$3^{\ell}\le n<3^{\ell+1}$

若$n=3^{\ell}$，得證

若$n>3^{\ell}$，則t為偶數。令$t=2^{v}\cdot u, v\ge 1, u$為偶數

$\because u<2k+1$ $\quad\therefore u=\sum_{i=1}^{r}2^{a_i}\cdot 3^{b_i}$ ， $\begin{matrix} a_1>\cdots>a_r \\ b_1<\cdots<b_r \end{matrix}$

故$n=3^{\ell}+2^{v}\cdot u=3^{\ell}+2^{v}(\sum_{i=1}^{r}2^{a_i}\cdot 3^{b_i})$

$$=3^{\ell}+\sum_{i=1}^{r}2^{v+a_i}3^{b_i} \quad , \quad \begin{matrix} v+a_1>\cdots>v+a_r \\ b_1<\cdots<b_r \end{matrix}$$

只需驗證$3\ell \nmid 3^{b_r}$

$$3^{\ell+1}>n\ge 3^{\ell}+2^{v+a_r}3^{b_r}\ge 3^{\ell}+2\cdot 3^{b_r}$$

$\therefore 3^{b_r}<3^{\ell}$ 故得證。