八十六學年度高中數學競賽(台中區)---競試一試題
(時間二小時)

1. 令$\Gamma: y = x^2$表示平面上的拋物線，$P(a,b)$是Γ上的一點。如果某一直線L通過P點，而且另外有一條平行L的直線L 使得所有介於L和L 之間且平行於L的直線都和Γ不相交，則我們稱直線L是過P點的切線，請用前述定義証明

   (a)過P點的切線L的方程式是$y = 2a(x-a)+b$;

   (b)若$Q(c,d)$是Γ上異於P的一點，且過Q的切線為M，今分別作過P且垂直L的直線N_1和過Q且垂直M的直線N_2。設N_1和N_2相交於R，求R的坐標並証明R的Y坐標不小於 1/2。

2. 設數列$a_1, a_2, \cdots$滿足關係式$a_{n+2} = \dfrac{{a_{n+1}}^2+3}{a_n}$，$n \geq 1$，且$a_1 = a_2 = 1$，請証明$a_{n+2} + a_n = 5a_{n+1}$。

3. (a)請証明$\cos\dfrac{\pi}{7}$是$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$的一根

   (b)請証明$$\frac{\sin^2\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{3\pi}{7}} = \frac{\sin^2\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

4. 請觀察$5 = 2+3$，$6 = 2\cdot 3$，$7 = 2^2+3$，$8 = 2^3$，$9 = 3^2$，$10 = 2^2 + 3\cdot 2$於是有人提出以下猜測：任何自然數n都可以表示成一些形如$2^a \cdot 3^b$且互不整除的自然數的和。

(a)請証明：如果所有奇自然數滿足上述猜測，則所有偶自然數也能滿足上述猜測。

(b)請証明所有自然數皆滿足上述猜測。