

八十六學年度台南區高級中學數學科複賽

競賽(二)

時間：一小時

1、令 a, b 表兩實數，若 $ab > 0$ ，且 $a^2 - 2ab - 9b^2 = 0$ ，

試求 $\log_{10}(a^2 + ab - 6b^2) - \log_{10}(a^2 + 4ab + 15b^2)$ 之值。

2、已知 $\triangle ABC$ 的三內角為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ ，

若 $\angle A + \angle C = 2\angle B$ ，且 $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$ ，

試求 $\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)$ 之值。

3、已知 $\triangle ABC$ 之兩個頂點座標為 $A(-2, 0), B(6, 0)$ ，若 $\angle ACB$ 的角平分線恆過原點，試求頂點 C 的軌跡方程。

4、試求(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a^n, 0 < a < 1$ ，

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)a^n, 0 < a < 1$ 。

5、設 a 為實數，試求 a 之值使得 $\sum_{n=1}^{20} n|n-a|$ 為最小。

6、設 $PQRS$ 的正方形，若 A 為 $\overline{PQ}$ 上之一點，
 B 為 $\overline{QR}$ 上之一點，且滿足 $\angle SAP = \angle SAB$ ，
令 H 為 $\overline{AB}$ 上之一點，且 $\overline{SH} \perp \overline{AB}$ ，
若 $\overline{AH} = 3, \overline{HB} = 2$ ，試求此正方形之邊長。

