86年度新竹區複賽 **競試(一)參考解答**

新竹區高中數學競試甄選題－朱亮儒　提供

1. 不防設 $p<q<r$ 且令正整數 x,y,z 滿足

$$\begin{cases} pq+1=xr & (1) \\ qr+1=yp & (2) \\ pr+1=zq & (3) \end{cases}$$

由(1),(3)得到

$$pq-pr=xr-zq \Rightarrow \quad q(p+z)=r(p+x)$$

$$\Rightarrow \ q|(p+x) \text{（因為} q,r \text{是互異的質數）}$$

由(1)及 $p<q<r$ 知道 $1\le x<p$，因此

$$q=p+x \qquad (4)$$

同理，由(1),(2)可得

$$p|(q+x) \qquad (5)$$

綜合(4),(5)得到

$$p|2x \Rightarrow p=2, x=1 \text{（因為} 1\le x<p \text{）}.$$

再由(4),(1)得到

$$\begin{cases} p=2 \\ q=p+x=2+1=3 \\ r=pq+1=2\cdot 3+1=7 \end{cases}$$

所以 $\{p,q,r\}=\{2,3,7\}$。

2.

如圖，若三圓的圓心在同一條線上，因為兩圓的公共弦垂直於它們的連心線，所以三條公共弦互相平行，若三圓的圓心不共線，設 $\overline{AB},\overline{CD}$ 的交點為 P，E 為圓 O_2，O_1 一個交點，延長 $\overline{EP}$ 與圓 O_2，O_1 分別交於 G，H；則在圓 O_1 中，

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD} \qquad (1)$$

在圓O_2中，

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PE}\cdot\overline{PG} \qquad (2)$$

在圓O_3中，

$$\overline{PC}\cdot\overline{PD}=\overline{PE}\cdot\overline{PH} \qquad (3)$$

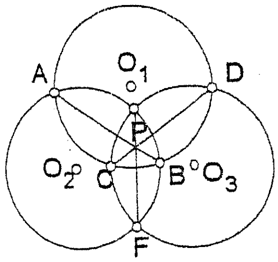
由(1),(2)可得

$$\overline{PC}\cdot\overline{PD}=\overline{PE}\cdot\overline{PG} \qquad (4)$$

由(3),(4)又可得

$$\overline{PE}\cdot\overline{PH}=\overline{PE}\cdot\overline{PG}$$

所以$\overline{PH}=\overline{PG}$，即$G$與$H$重合。同理，$G$與兩圓$O_2$，$O_3$的交點$F$也重合。所以三個圓的三條公共弦$\overline{AB},\overline{CD},\overline{EF}$交於一點。



3.顯然，$n\geq 4$，以下我們證明$n\leq 6$，任取兩個之間的連線段是紅色的點A,B。由題意知，其他點都至少與A與B的連線段是紅色，因為除A外，與B的連線段是紅色恰有2點，同理，除B外，與A的連線段是紅色恰有2點，故至多有 4 點與A或B的連線段是紅色。因此，$4\leq n\leq 6$，但對$n=5$時，由 Euler 握手定理可得一矛盾式：

$$2|E|=\sum d(v)=3\cdot 5=15.$$

故$n\neq 5$，而$n=4$或6可由下圖得知是可行的。