

問題一：

設 $x \neq 0$ ，因為

$$f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

且 (以 $\frac{1}{x}$ 代 x)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{1}{x},$$

得

$$f(x) = -\frac{x}{3} - \frac{2}{3x}$$

故由算幾不等式得

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{|x|}{3} + \frac{2}{3|x|} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{|x|}{3} \cdot \frac{2}{3|x|}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

問題二：

因為 $1897 = 7 \times 271$ 且

$$(i) 2903 \equiv 803 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$(ii) 464 \equiv 261 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow A_n \equiv 0 \pmod{7}$$

$$(iii) 2903 \equiv 464 \equiv 193 \pmod{271}$$

$$803 \equiv 261 \pmod{271}$$

$$\Rightarrow A_n \equiv 0 \pmod{271}$$

故得證。

問題三：

兩次取出相同球號的機率是

$$\frac{C_2^2 + C_2^3 + \cdots + C_2^n}{C_2^{\frac{1}{2}n(n+1)}} = \frac{\frac{1}{6}n(n-1)2(n+1)}{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n-1)} = \frac{4}{3n+6}$$

$$\text{兩次取出不同球號的機率是 } 1 - \frac{4}{3n+6} = \frac{3n+2}{3n+6}$$

由對稱原理，第一個球的號碼大於第二個球的號碼的機率是

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3n+2}{3n+6} \right) = \frac{3n+2}{6n+12}$$

問題四：

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

$$= \frac{a+b+c}{abc}$$

$$= \frac{a+b+c}{4RS} \quad \text{其中 } R \text{ 為 } \triangle ABC \text{ 外接圓半徑 } (\because S = \frac{abc}{4R})$$

$$= \frac{\sin \angle A + \sin \angle B + \sin \angle C}{2S} \quad (\text{正弦定理})$$

$$\leq \frac{3 \sin \left(\frac{\angle A + \angle B + \angle C}{3} \right)}{2S} \quad (\text{利用 } \sin \text{ 函數在 } [0, \pi] \text{ 的凸性})$$

$$= \frac{3 \sin \frac{\pi}{3}}{2S}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4S}$$

“=” 成立的充要條件為

$$\frac{\sin \angle A + \sin \angle B + \sin \angle C}{3} = \sin \left(\frac{\angle A + \angle B + \angle C}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$$