

教育部八十六學年度高級中學數學競賽
花蓮區複賽試題(一)

編號：_____

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
第一題十分、第二題十三分、第三題十三分、第四題十三分。
2. 考試時間：2小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

計算題

- 一、三個大男生，每個人都有兩份工作。司機常嘲笑音樂家的長頭髮。音樂家和園丁常跟阿雄去釣魚。畫家向顧問借了一本書。司機在追求畫家的妹妹。阿福欠園丁 200 元。阿明打羽毛球痛宰阿福跟畫家。他們當中有一個是理髮師而且沒有兩個人有相同工作。是誰在做什麼工作？(10分)
- 二、白藍粉刷公司想粉刷他們的 n 層樓的大樓。為了凸顯公司的標誌，限制每層樓只能用白色或者是藍色的油漆來粉刷，而且不能有連續兩層樓都是藍色的。你能幫白藍粉刷公司算算看，他有多少種粉刷方式嗎？令 f_n 代表可能的粉刷方式
 1. 導出 f_n, f_{n+1}, f_{n+2} 的關係式。(7分)
 2. 求 f_9 的值。(6分)
- 三、設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，已知 $-1 \leq f(1) \leq 3, 1 \leq f(2) \leq 5, 2 \leq f(3) \leq 6$ ，則 $f(4)$ 的範圍為何？(13分)
- 四、四面體 $D-ABC$ ，若 $\angle ADB = \angle BCD = \angle CDA = \frac{\pi}{2}$ ，則稱 $D-ABC$ 為直角四面體。證明
 1. 若 $D-ABC$ 為直角四面體，則 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，且 D 到平面 ABC 的垂足為 $\triangle ABC$ 三角形的垂心。(7分)
 2. 若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，則必能找到頂點 D 使得 $D-ABC$ 為一個直角四面體。(6分)