104 學年度台灣省北二區 (新竹高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題　參考解答

【試題一】

設 a_n 為 $1^4+2^4+\ldots+n^4$ 的個位數字，證明：小數 $0.a_1a_2a_3\ldots$ 為有理數。

【證明】：.

其實只要證明此小數為循環小數即可。

因為 $1^4+2^4+\ldots+10^4$ 的個位數 a_{10} 等於 $11^4+12^4+\ldots+20^4$，到 $91^4+92^4+\ldots+100^4$ 都相等，所以 $a_{101}\equiv a_1+10a_{10}\equiv a_1$。(註：其實 a_n 真的是 100 一循環。)

【試題二】

現有一台有效位數為八位數的計算機(即小數點前後一共有八位)，假設我們按了 2 之後不斷按 $\sqrt{\ }$ 按鍵，請問最終計算機的螢幕會呈現甚麼數字？陳述你的理由。可否估計要按幾次 $\sqrt{\ }$ 按鍵才會變成你所認為的數字？

【解答】

原問題可以轉換為

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n},$$
$$x_1=2$$

由數學歸納法可以得知:

$$1<x_{n+1}<x_n$$

並且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

因此最後螢幕上顯示的數字是 1。現在我們估計要讓螢幕顯示為 1 所需要的按鍵次數，這邊我們留意，要按出 x_n 來只需要 n-1 次。同時我們利用迭代關係可得出以下不等式

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}=\frac{\sqrt{x_n}-1}{x_n-1}=\frac{1}{\sqrt{x_n}+1}\leq\frac{1}{2}$$

因此，

$$(x_n-1)\leq 2^{-(n-1)}<10^{-7}$$

因此我們可以估計出

$$n-1>\frac{7}{\log_{10}2}\approx 23.25$$

所以至多需要 24 次即可達成。