新北市 104 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題 參考解答

【問題一】

假設 $f(x)$ 是一個整係數多項式，且 $f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、...、$f(2015)$ 均不被 2015 整除，試證明 $f(x)$ 沒有整數根。

【參考解答】

設 $f(x)$ 有整數根 p，則有 $f(x)=(x-p)g(x)$，其中 $g(x)$ 也是整係數多項式。因為 p 是整數，故存在整數 q、r 使得 $p=2015q+r$，其中 $0\le r<2015$。
故有 $f(r)=-2015qg(x)$，$f(r)$ 被 2015 整除，與假設矛盾。故得證。

【問題二】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$、$\overline{AB}=c$。證明

$$\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{3}{2abc}\text{。}$$

【參考解答】

$$\begin{aligned}\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2a^3bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2b^3ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2c^3ab}\\&=\frac{1}{2abc}\left(\left((\frac{a}{b})^2+(\frac{b}{a})^2\right)+\left((\frac{b}{c})^2+(\frac{c}{b})^2\right)+\left((\frac{c}{a})^2+(\frac{a}{c})^2\right)-3\right)\\&\ge\frac{1}{2abc}(2+2+2-3)=\frac{3}{2abc}\quad\square\end{aligned}$$