104 學年度高級中學數學學科能力競賽
嘉義區複賽試題（二）【解答】

一、【解】

$\tan\theta \le \cos\theta \Leftrightarrow \sin\theta \le \cos^2\theta \Leftrightarrow \sin^2\theta + \sin\theta - 1 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le \sin\theta \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$\frac{1}{2}\cos\theta \le \tan\theta \Leftrightarrow \cos^2\theta \le 2\sin\theta \Leftrightarrow \sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \ \sin\theta \ge -1+\sqrt{2}$

所以 $-1+\sqrt{2} \le \sin\theta \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

二、【解】

$x(y^2-p)+y(x^2-p)=5p \Leftrightarrow (x+y)(xy-p)=5p$. 分情形考慮：

i. $x+y=5,\ xy-p=p$:則 $(x,y)=(4,1),(1,4),\ p=2$ 或 $(x,y)=(3,2),(2,3),\ p=3$.

ii. $x+y=p,\ xy-p=5$:則 $(x-1)(y-1)=6$,故 $(x,y)=(3,4),(4,3),(2,7),(7,2)$, $p=x+y=7$ (9 不合)。

iii. $x+y=5p,\ xy-p=1$: 則因 $x+y=5p>p+1=xy\ge x+y$,無解。

所以 $p=2,3$ 或 7.

三、【解】

設正整數 n 滿足 n^3 的末兩位數字是88

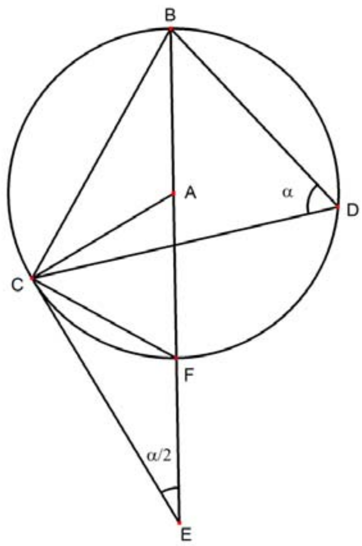
由個位數是8可令 $n=10s+2$

由 $n^3=(10s+2)^3=1000s^3+600s^2+120s+8$ 與十位數是8得 s 的個位數是4或9所以可令 $s=5t+4$

由 $n=10s+2=50t+42$ 且取 $t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

得 $n=42,\ 92,\ 142,\ 192,\ 242,\ 292$ 所以 $n_6=292$

四、【解】



因 $\angle CFB=\angle CDB=\alpha$,

$\angle ECF=\angle CFB-\angle CEF=\alpha/2$，且因 CE 為切線， $\angle CBF=\angle ECF=\alpha/2$.

因 BAF 為直徑，$\angle FCB=90°$,

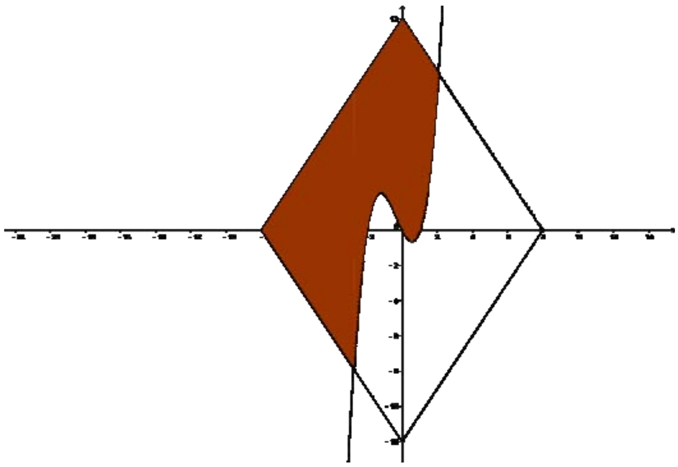
$90°=\angle CFB+\angle CBF=\alpha+\frac{\alpha}{2}$，所以 $\alpha=60°$.

因此 $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=\frac{\sin120°}{\sin30°}=\sqrt{3}$.

五、【解】

令 $f(x)=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$, 則

x	$f(x)$
0	0
1	0
2	8
3	30
–1	2
–2	0
–3	–12



因此

$(0,y)$ 在 D 上之格子點數目為13
$(1,y)$ 在 D 上之格子點數目為11
$(-1,y)$ 在 D 上之格子點數目為9
$(2,y)$ 在 D 上之格子點數目為2
$(-2,y)$ 在 D 上之格子點數目為10
$(-3,y)$ 在 D 上之格子點數目為15
$(-4,y)$ 在 D 上之格子點數目為13
$(-5,y)$ 在 D 上之格子點數目為9
$(-6,y)$ 在 D 上之格子點數目為7
$(-7,y)$ 在 D 上之格子點數目為3
$(-8,y)$ 在 D 上之格子點數目為1

共 93

六、【解】

觀察：設 p 為 n 的質因數，m 為最大的正整數使得 $p^m|n$. 若 $d|n$ 為完全平方數，則當 $m=2k$ 或 $2k+1, p$ 出現在 d 的次數共有 $k+1$ 可能：$0,2,\ldots,2k$.今要求最小可能的 n，m 只能是偶數。

因 $30=2\times3\times5$，n 最多有3個不同的質因數，因要求 n 為最小，它們只可能是 $2,3,5$.。現分情形討論：

1. $n=2^{2k}$：則 $k+1=30$，所以 $k=29$，$n=2^{58}$.
2. $n=2^{2k_1}3^{2k_2}$：因 $30=(k_1+1)(k_2+1)$, 需考慮 (k_1+1,k_2+1) 的組合為 $(15,2),(10,3),(6,5),(5,6)$. 所以 $n=2^{28}3^2,\ 2^{18}3^4$ 或 $2^{10}3^8,\ 2^8 3^{10}$.
3. $n=2^{2k_1}3^{2k_2}5^{2k_3}$：$k_1+1=5, k_2+1=3, k_3+1=2$，$n=2^8 3^4 5^2$.

比較得最小的 n 為 $2^8 3^4 5^2$.

七、【解】

平均約需買 $\frac{10}{1}+\frac{10}{2}+\ldots+\frac{10}{10}\doteq 29.3$ 張單曲。

平均需花 $29.3\times25\text{元}=732.5<800$，所以划算。

以下是簡單證明：

假設已經抽到了k個團員的相片，則正好要再買 m 單曲

才能抽到新卡的機率為

$$\left(\frac{k}{10}\right)^{m-1}\left(1-\frac{k}{10}\right)$$

所以平均需要再買 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}m\left(\frac{k}{10}\right)^{m-1}\left(1-\frac{k}{10}\right)=\frac{1}{1-\frac{k}{10}}$ 張單曲。

所以平均要購買

$\displaystyle\sum_{k=0}^{9}\frac{1}{1-\frac{k}{10}}=\frac{10}{1}+\frac{10}{2}+\ldots+\frac{10}{10}\doteq 29.3$ 張單曲才能蒐集到每個團員的相片。